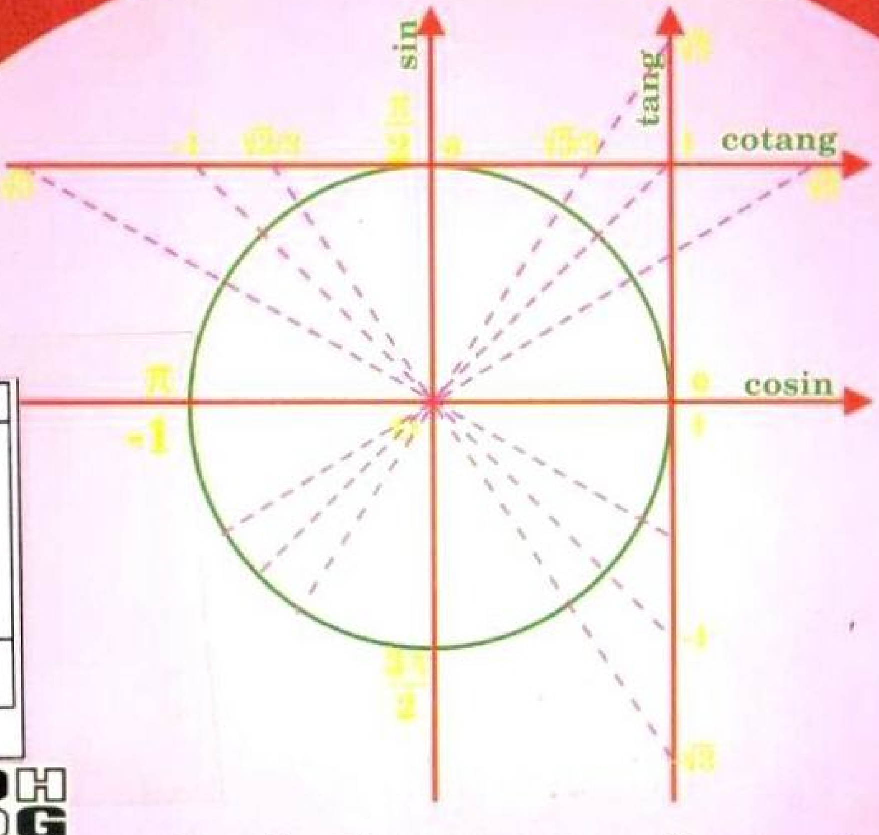
LÊ BÍCH NGỌC *(chủ biên)*
LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Lượng giác 11

(Dùng cho học sinh ban A
và luyện thi đại học)


sin
tang
cotang
cosin
π
-1
0
1
-1

TT TT-TV * ĐHQGHN
516.24
LE-N
2005
LC/01476

ĐH QG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ BÍCH NGỌC *(Chủ biên)*
LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
LƯỢNG GIÁC 11

(*Dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học*)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

HỌC VÀ ÔN TẬP
TOÁN

do nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Thạc sĩ Toán học – Kĩ sư Tin học Lê Hồng Đức biên soạn.

Bộ sách gồm 8 cuốn:

Cuốn 1 : Học và ôn tập Toán - Hình học 10
Cuốn 2 : Học và ôn tập Toán - Đại số 10
Cuốn 3 : Học và ôn tập Toán - Lượng giác 11
Cuốn 4 : Học và ôn tập Toán - Hình học 11
Cuốn 5 : Học và ôn tập Toán - Đại số và Giải tích 11
Cuốn 6 : Học và ôn tập Toán - Hình học 12
Cuốn 7 : Học và ôn tập Toán - Giải tích 12
Cuốn 8 : Học và ôn tập Toán - Đại số tổ hợp 12

Mục tiêu của bộ sách này là cung cấp cho các thầy, cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ sách học tập bổ ích.

Bộ sách được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ sách này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các thầy, cô giáo đến các em học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán tốt nghiệp PTTH hoặc vào các trường đại học.

Cuốn

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
LƯỢNG GIÁC 11

do Lê Bích Ngọc chủ biên được chia thành 2 chương:

Chương I: Hàm số lượng giác
Chương II: Phương trình và hệ phương trình lượng giác

bao gồm 8 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 42 dạng toán cơ bản và nâng cao của lượng giác 11.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Nhóm Cự Môn

Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội

Hà Nội, ngày 2 tháng 9 năm 2005
NHÓM CỰ MÔN

CHƯƠNG I
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

CHỦ ĐỀ 1
GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

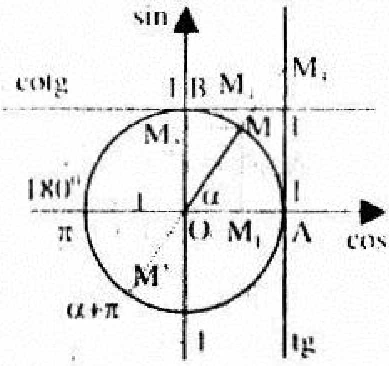
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. SỬ DỤNG ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC

Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng có bán kính bằng 1, trên đó có điểm A gọi là điểm gốc.

- Trục hoành tương ứng với trục giá trị của cosin.
- Trục tung tương ứng với trục giá trị của sin.
- Đường thẳng đi qua điểm A(1, 0) và vuông góc với trục cos tương ứng với trục giá trị của tang.
- Đường thẳng đi qua điểm B(0, 1) và vuông góc với trục sin tương ứng với trục giá trị của cotang.

Để biểu diễn giá trị các hàm số lượng giác của góc α trên đường tròn lượng giác ta thực hiện theo các bước:



Bước 1: Xuất phát từ điểm đầu A(1, 0) ta xác định vị trí của điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

Bước 2: Xác định:

- Gọi M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên trục cos, ta được $\overline{OM_1} = \cos\alpha$.
- Gọi M_2 là hình chiếu vuông góc của M lên trục sin, ta được $\overline{OM_2} = \sin\alpha$.
- Gọi M_3 là giao điểm của tia OM với trục tg, ta được $\overline{AM_3} = \text{tg}\alpha$.
- Gọi M_4 là giao điểm của tia OM với trục cotg, ta được $\overline{BM_4} = \text{cotg}\alpha$.

Chú ý: Từ cách biểu diễn như vậy chúng ta nhận thấy:

1. Các góc lượng giác $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ cùng xác định một điểm M trên đường tròn lượng giác, do đó:

(i). $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$.

(ii). $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$.

(iii). $\text{tg}\alpha = \text{tg}(\alpha + 2k\pi)$.

(iv). $\text{cotg}\alpha = \text{cotg}(\alpha + 2k\pi)$.

2. Nếu gọi M' là điểm đối xứng với M qua O, ta thấy ngay tia OM cắt các trục tg và cotg vẫn tại M_3 và M_4, do đó các công thức (iii) và (iv) được mở rộng hơn thành:

(i). $\text{tg}\alpha = \text{tg}(\alpha + k\pi)$.

(ii). $\text{cotg}\alpha = \text{cotg}(\alpha + k\pi)$.

2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT

Hàm \ Độ đo	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	1880^0
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ǁ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cotgα	ǁ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	ǁ

3. DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Ta có các kết quả sau:

Hàm số lượng giác \ Độ đo	$0 < \alpha < 90^0$	$90^0 < \alpha < 180^0$
cosα	+	–
sinα	+	+
tgα	+	–
cotgα	+	–

4. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

a. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b. $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

c. $cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

d. $tg\alpha . cotg\alpha = 1$

e. $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$

f. $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + cotg^2\alpha$

5. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐỐI NHAU

a. $\sin(-x) = -\sin x$

b. $\cos(-x) = \cos x$

c. $tg(-x) = -tgx$

d. $cotg(-x) = -cotgx$

6. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG BÙ NHAU

a. $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$

b. $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

c. $tg(180^0 - \alpha) = -tg\alpha$

d. $cotg(180^0 - \alpha) = -cotg\alpha$

7. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG PHỤ NHAU

a. $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$

b. $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

c. $tg(90^0 - \alpha) = cotg\alpha$

d. $cotg(90^0 - \alpha) = tg\alpha$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tính giá trị của biểu thức lượng giác chứa các cung đặc biệt.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng:

1. Các hệ quả trong bảng giá trị lượng giác của các cung đặc biệt.
2. Các tính chất sau với $k \in \mathbb{Z}$
   - (i). $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$.
   - (ii). $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$.
   - (iii). $\text{tg}\alpha = \text{tg}(\alpha + k\pi)$.
   - (iv). $\text{cotg}\alpha = \text{cotg}(\alpha + k\pi)$.

Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \text{tg}45^0.\cos390^0.\text{cotg}(-150^0).$$

Giải

Ta có:

$$A = \text{tg}45^0.\cos(30^0 + 360^0).\text{cotg}(30^0 - 180^0) = \text{tg}45^0.\cos30^0.\text{cotg}30^0$$

$$= 1.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3}{2}.$$

Chú ý: Dạng toán trên được mở rộng tự nhiên cho trường hợp các biểu thức có chứa tham số.

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 3a.\cos360^0 + b.\sin(-270^0) + a.\cos180^0.$$

Giải

Ta có:

$$A = 3a.\cos(0^0 + 360^0) + b.\sin(90^0 - 360^0) + a.\cos180^0$$

$$= 3a.\cos0^0 + b.\sin90^0 + a.\cos180^0 = 3a + b - a = 2a + b.$$

Ví dụ 3: Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \frac{8a^3\cos^3 60^0 + b^3\text{cotg}^3 45^0 + (12ab.\sin0^0)^2}{(25a.\cos90^0)^3 + 2a.\sin30^0 + 2b.\cos^2 45^0}.$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{8a^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + b^3.(1)^3 + (12ab.0)^2}{(25a.0)^3 + 2a.\frac{1}{2} + 2b.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2.$$

Chú ý: Từ kết quả tính toán trên ta thấy ngay rằng yêu cầu của bài toán còn có thể được phát biểu dưới dạng "*Chứng minh rằng với mọi a, b khác không thỏa mãn $a \neq -b$ ta luôn có $A \geq 0$*".

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 8 - \cos^2 30^0 + 2\sin^2 45^0 - \sqrt{3}\,tg^3 60^0$.

b. $B = (a^2 + 1).\sin 0^0 + b.\cos 90^0 + c.\cos 180^0$.

Bài tập 2: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 4\sin^4 135^0 + \sqrt{3}\cos^3 150^0 - 3cotg^2 120^0$.

b. $B = 4\cos^4 135^0 - 8\sin^3 150^0 - 3(tg^2 120^0 - tg^4 135^0)$.

Bài tập 3: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \dfrac{a^2.\sin 180^0 - b^3\sqrt{2}.\sin 135^0 - 2ab^2.\cos 150^0}{a.\cot g150^0 - b.\cos 0^0 + 2atg60^0}$.

b. $B = \dfrac{a^2 \sin 90^0 - b^2 \cos 0^0}{a.\cot g45^0 + b.\cos 180^0 - 2a.\cot g90^0}$.

Bài toán 2: Dấu của biểu thức lượng giác .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xác định điểm ngọn của góc thuộc cung phần tư nào trên đường tròn đơn vị, từ đó sử dụng các hệ quả trong bảng dấu của các giá trị lượng giác.

Ví dụ 1: Xác định dấu của các biểu thức:

$$A = \sin 225^0.tg130^0.cotg(\quad 175^0).$$

Giải

Ta có:

$180^0 < 225^0 < 270^0 \quad > \sin 225^0 < 0.$

$390^0 = 30^0 + 360^0 \quad > tg390^0 > 0.$

$175^0 = 5^0 \quad 180^0 \quad > cotg(\quad 175^0) > 0.$

Từ đó suy ra $A > 0$.

Chú ý: Nếu biểu thức còn phụ thuộc thêm tham số góc α thoả mãn điều kiện K, chúng ta cần thực hiện phép biểu diễn các góc trong biểu thức.

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xác định dấu của các biểu thức:

a. $A = \cos(\alpha \quad \frac{\pi}{4})$.

b. $B = \sin 2\alpha.tg(2\alpha \quad \frac{\pi}{2})$.

Giải

a. Từ giả thiết:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} <> -\frac{\pi}{4} < \alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} <> -\frac{\pi}{4} < \alpha \quad \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$

$$> A = \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) > 0.$$

b. Từ giả thiết ta được:

$$0 < 2\alpha < \pi \Rightarrow \sin 2\alpha > 0.$$

$$-\frac{\pi}{2} < 2\alpha - \frac{\pi}{2} < \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < 2\alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} tg(2\alpha - \frac{\pi}{2}) \geq 0 \text{ nếu } 0 \leq 2\alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \\ tg(2\alpha - \frac{\pi}{2}) < 0 \text{ nếu } -\frac{\pi}{2} < 2\alpha - \frac{\pi}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg(2\alpha - \frac{\pi}{2}) \geq 0 \text{ nếu } \frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\ tg(2\alpha - \frac{\pi}{2}) < 0 \text{ nếu } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} A \geq 0 \text{ nếu } \frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\ A < 0 \text{ nếu } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định dấu của các biểu thức:

a. $A = \cos 195^0 . tg269^0 . cotg(-98^0)$.

b. $B = \sin(-1441^0) . \cos 1080^0 . tg908^0 . cotg(-1972^0)$.

Bài tập 2: Cho $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \backslash \{\frac{\pi}{4}\}$. Xác định dấu của các biểu thức:

a. $A = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) . \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$.

b. $B = tg2\alpha . \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$.

Bài tập 3: Cho $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{6}$. Xác định dấu của biểu thức:

$$A = \frac{\cos 2\alpha . \sin(2\alpha + \frac{\pi}{2})}{tg(\alpha + \frac{\pi}{3})}.$$

Bài tập 4: Cho ΔABC, xác định dấu của các biểu thức:

a. $S_1 = \sin A + \sin B + \sin C$.

b. $S_2 = \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$.

Bài tập 5: Cho ΔABC, xác định dấu của các biểu thức:

$$S = tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}.$$

Bài tập 6: Tìm $k \in \mathbf{Z}$, sao cho

a. $\sin(\frac{\pi}{4} + k\pi) > 0$.

b. $\cos(\frac{\pi}{3} - k\pi) < 0$.

Bài toán 3: Rút gọn biểu thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các hằng đẳng thức lượng giác.

Cần lưu ý rằng việc rút gọn biểu thức trong nhiều trường hợp là công việc cần thiết nhất trước khi thực hiện việc tính giá trị của biểu thức.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1-\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}\right].$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1-\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}\right] = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1-\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right]$$

$$= \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = 2\mathrm{tg}\alpha.$$

Chú ý: Thông qua ví dụ trên ta có tổng kết ban đầu: nếu bài toán trên được phát biểu dưới dạng:

" Cho tgα = m, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1-\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}\right]."$$

Khi đó với các em học sinh chưa có kinh nghiệm sẽ thực hiện bài toán theo các bước:

Bước 1: Tính giá trị của các hàm số lượng giác có trong biểu thức là sinα và cosα.

Bước 2: Thay sinα và cosα vào biểu thức của A.

Cách giải này đương nhiên không sai nhưng sẽ rất phức tạp nếu giá trị của sinα và cosα là các biểu thức vô tỉ hoặc giá trị của tgα phải biện luận theo tham số. Như vậy cách giải tốt nhất là thực hiện theo các bước:

Bước 1: Rút gọn biểu thức – thực hiện như trong ví dụ.

Bước 2: Suy ra A = 2m.

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$A = 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha). \quad (1)$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin^6\alpha + \cos^6\alpha &= (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3\\ &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\\ &= 1 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha. \quad (2)\\ \sin^4\alpha + \cos^4\alpha &= (\sin^2\alpha)^2 + (\cos^2\alpha)^2 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha\\ &= 1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha. \quad (3)\end{aligned}$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$A = 2(1 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha) - 3(1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha) = -1.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức:

$$A = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép bình phương, ta có:

$$A^2 = \left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)^2$$

$$= \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} + 2\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

$$= \frac{(1-\sin\alpha)^2 + (1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha} + 2 = \frac{2+2\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} + 2 = \frac{4}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{4}{\cos^2\alpha}} = \frac{2}{|\cos\alpha|}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$A = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}} + \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \left|\frac{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}\right| + \left|\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}}\right|$$

$$= \frac{(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2})^2 + (\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})^2}{\left|\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{2}{|\cos\alpha|}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Rút gọn biểu thức:

a. $A = \dfrac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha.\text{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha.\text{cotg}^2\alpha}$.

b. $B = (1 + \text{cotg}\alpha + \dfrac{1}{\sin\alpha})(1 + \text{cotg}\alpha - \dfrac{1}{\sin\alpha})$.

Bài tập 2: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\left[1+\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right].$$

Bài tập 3: Rút gọn biểu thức:

a. $A = \dfrac{1}{\sin\alpha - \sqrt{\cot g^2\alpha - \cos^2\alpha}}$, với $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.

b. $B = \sqrt{(1+tg\alpha).\cos^2\alpha + (1+\cot g\alpha).\sin^2\alpha}$, với $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

Bài tập 4: Rút gọn biểu thức:

a. $A = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{\cot g\alpha + \cot g\beta}$.

b. $B = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta} - \cot g^2\alpha.\cot g^2\beta$.

Bài toán 4: Chứng minh đẳng thức lượng giác đơn giản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng hệ thức cơ bản và các hệ quả để thực hiện các phép biến đổi tương đương. Khi đó ta lựa chọn theo các hướng sau:

Hướng 1: Biến đổi VT thành VP hoặc ngược lại, trong trường hợp này thông thường ta lựa chọn việc biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức về một đẳng thức luôn đúng.

Hướng 3: Xuất phát từ một đẳng thức đúng, biến đổi thành đẳng thức cần chứng minh.

Hướng 4: Biến đổi đồng thời VT và VP tới một biểu thức trung gian.

Ví dụ 1; Chứng minh rằng:

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1.$$

Giải

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$VT = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$$= \sin^2\alpha - (1 - \sin^2\alpha) = 2\sin^2\alpha - 1,\ \text{đpcm}.$$

Cách 2: Ta biến đổi đẳng thức về dạng:

$$\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1 - \cos^4\alpha = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin^2\alpha)^2 - \cos^4\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2\alpha)^2 - \cos^4\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos^4\alpha - \cos^4\alpha = 0,\ \text{luôn đúng}.$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

$$(\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha)^2 - (\text{tg}\alpha - \text{cotg}\alpha)^2 = 4.$$

Giải

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$\text{VT} = (\text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha + 2\text{tg}\alpha.\text{cotg}\alpha) - (\text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha - 2\text{tg}\alpha.\text{cotg}\alpha)$$

$$= 4\text{tg}\alpha.\text{cotg}\alpha = 4, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$\text{VT} = (\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha - \text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha)(\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha + \text{tg}\alpha - \text{cotg}\alpha)$$

$$= 4\text{cotg}\alpha.\text{tg}\alpha = 4, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng:

$$\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)^2 = 4\text{cotg}^2\alpha.$$

Giải

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$\text{VT} = \left[\frac{(\sqrt{1-\cos\alpha})^2 - (\sqrt{1+\cos\alpha})^2}{\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}\right]^2 = \left[\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\right]^2 = \frac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$= 4\text{cotg}^2\alpha, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$\text{VT} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - 2.\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

$$= \frac{(1-\cos\alpha)^2 + (1+\cos\alpha)^2 - 2(1-\cos^2\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 4\text{cotg}^2\alpha.$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng:

$$\sin^2\alpha.\text{tg}\alpha + \cos^2\alpha.\text{cotg}\alpha + 2\sin\alpha.\cos\alpha = \text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha.$$

Giải

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$\text{VT} = \sin^2\alpha.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \cos^2\alpha.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$= \frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2}{\sin\alpha.\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha.\cos\alpha}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = \text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Ta biến đổi đẳng thức về dạng:

$$(1-\sin^2\alpha)\text{tg}\alpha + (1-\cos^2\alpha)\text{cotg}\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \sin^2\alpha.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 2\sin\alpha.\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow 0 = 0,\ \text{luôn đúng.}$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng:

$$\frac{\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}.\frac{1+\text{cotg}^2\alpha}{\text{cotg}^2\alpha} = \frac{1+\text{tg}^4\alpha}{\text{tg}^2\alpha+\text{cotg}^2\alpha}.$$

Giải

Ta có:

$$\text{VT} = \frac{\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}.\left(\frac{1}{\text{cotg}^2\alpha}+1\right) = \frac{\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}.(\text{tg}^2\alpha+1) = \text{tg}^2\alpha.$$

$$\text{VP} = \frac{1+\text{tg}^4\alpha}{\text{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha}} = \text{tg}^2\alpha.$$

Suy ra VT = VP, đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 6: Cho:

$$a.\sin^4\alpha + b.\cos^4\alpha = \frac{ab}{a+b}. \qquad (1)$$

Chứng minh rằng:

$$a^4.\sin^{10}\alpha + b^4.\cos^{10}\alpha = \frac{a^4b^4}{(a+b)^4}. \qquad (2)$$

Giải

Từ (1) ta được:

$$(a+b)(a.\sin^4\alpha + b.\cos^4\alpha) = ab = ab(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow ab(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha) + a^2.\sin^4\alpha + b^2.\cos^4\alpha =$$

$$= ab(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha) + 2ab.\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow a^2.\sin^4\alpha + b^2.\cos^4\alpha - 2ab.\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow (a.\sin^2\alpha - b.\cos^2\alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow a.\sin^2\alpha - b.\cos^2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow a.\sin^2\alpha = b.\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{b} = \frac{\cos^2\alpha}{a} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{b+a} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \begin{cases}\sin^2\alpha = \dfrac{b}{a+b}\\ \cos^2\alpha = \dfrac{a}{a+b}\end{cases}.$$

Suy ra:

$$a^4.\sin^{10}\alpha + b^4.\cos^{10}\alpha = a^4.\left(\frac{b}{a+b}\right)^5 + b^4.\left(\frac{a}{a+b}\right)^5$$

$$= \frac{a^4b^4(b+a)}{(a+b)^5} = \frac{a^4b^4}{(a+b)^4}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng:

a. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ b. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

Bài tập 2: Chứng minh rằng:

a. $(1 + tg\alpha)(1 + cotg\alpha)\sin\alpha.\cos\alpha = 1 + 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

b. $(1 + tg\alpha)(1 + cotg\alpha)\sin\alpha.\cos\alpha = (1 + tg\alpha)\cos^2\alpha + (1 + cotg\alpha)\sin^2\alpha$

Bài tập 3: Chứng minh rằng:

a. $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

b. $$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{1 - \cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}.$$

c. $$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\left[\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha} - 1\right] = 2cotg\alpha.$$

d. $$\frac{1}{1+tg\alpha} + \frac{1}{1+cotg\alpha} = 1$$

Bài tập 4: Chứng minh rằng:

a. $$\frac{tg\alpha - \sin\alpha}{\sin^3\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}.$$

b. $$\frac{\sin^2\alpha}{1+cotg\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{1+tg\alpha} = 1 - \sin\alpha.\cos\alpha.$$

Bài tập 5: Chứng minh rằng:

a. $$\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)^2 = 4tg^2\alpha.$$

b. $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{1+cotg^2\alpha}{1-cotg^2\alpha}.$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng:

a. $$\frac{tg\alpha + tg\beta}{cotg\alpha + cotg\beta} = tg\alpha.tg\beta.$$

b. $$\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta} = \frac{tg^2\alpha - tg^2\beta}{tg^2\alpha.tg^2\beta}.$$

Bài tập 7: Cho $\sin^2a + \sin^2b + \sin^2c = 1$. Chứng minh rằng:

$$tg^2a.tg^2b + tg^2b.tg^2c + tg^2c.tg^2a = 1 - 2\,tg^2a.tg^2b.tg^2c.$$

Bài tập 8: Cho:

$$\begin{cases} a = \sin\alpha \\ b = \cos\alpha.\sin\beta \\ c = \cos\alpha.\cos\beta \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Hãy tổng quát hoá cho n số $a_1, a_2, ..., a_n$.

Bài toán 5: Biểu thức lượng giác độc lập đối với biến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện việc rút gọn biểu thức lượng giác về dạng hằng số.

Ví dụ 1: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

$$A = \frac{(1-\mathrm{cotg}^2\alpha)^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta có:

$$A = \frac{\left(1-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)^2}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} - \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} - \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{-4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = -4.$$

Cách 2: Ta có:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{\dfrac{1}{\sin^4\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha} = \frac{(1+\mathrm{cotg}^2\alpha)^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$A = \frac{(1-\mathrm{cotg}^2\alpha)^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha} - \frac{(1+\mathrm{cotg}^2\alpha)^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha} = -4.$$

Chú ý: Trong cách 1 chúng ta đã biết tận dụng tính bất biến của biểu thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dưới dạng:

$$1 = 1^2 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2.$$

Ví dụ 2: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

$$A = \sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}.$$

Giải

Ta sử dụng phép nâng bậc bằng đẳng thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, được:

$$A = \sqrt{\sin^4\alpha + 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin^2\alpha}$$

$$= \sqrt{(\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)^2} + \sqrt{(\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha)^2}$$

$$= \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 3.$$

Ví dụ 3: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α, β:

$$A = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta} - \text{cotg}^2\alpha.\text{cotg}^2\beta. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta}.\text{cotg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$= (1 + \text{cotg}^2\beta)\text{cotg}^2\alpha - (1 + \text{cotg}^2\alpha)$$

$$= \text{cotg}^2\alpha.\text{cotg}^2\beta - 1. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được A = – 1.

Ví dụ 4: Cho a.sinα.sinβ – b.cosα.cosβ = 0, chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α, β:

$$A = \frac{1}{a.\sin^2\alpha + b.\cos^2\alpha} + \frac{1}{a.\sin^2\beta + b.\cos^2\beta}.$$

Giải

Biến đổi A về dạng:

$$A = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{a.\sin^2\alpha + b.\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \frac{\frac{1}{\cos^2\beta}}{\frac{a.\sin^2\beta + b.\cos^2\beta}{\cos^2\beta}}$$

$$= \frac{1 + \text{tg}^2\alpha}{a.\text{tg}^2\alpha + b} + \frac{1 + \text{tg}^2\beta}{a.\text{tg}^2\beta + b}. \qquad (1)$$

Từ điều kiện của giả thiết:

a.sinα.sinβ – b.cosα.cosβ = 0 ⇔ a.sinα.sinβ = b.cosα.cosβ

$$\Leftrightarrow a.\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta = b \Leftrightarrow \text{tg}\beta = \frac{b}{a.\text{tg}\alpha}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$A = \frac{1 + \text{tg}^2\alpha}{a.\text{tg}^2\alpha + b} + \frac{1 + \left(\frac{b}{a.\text{tg}\alpha}\right)^2}{a.\left(\frac{b}{a.\text{tg}\alpha}\right)^2 + b} = \frac{1 + \text{tg}^2\alpha}{a.\text{tg}^2\alpha + b} + \frac{a^2.\text{tg}^2\alpha + b^2}{ab^2 + a^2b.\text{tg}^2\alpha}$$

$$= \frac{1 + \text{tg}^2\alpha}{a.\text{tg}^2\alpha + b} + \frac{a^2.\text{tg}^2\alpha + b^2}{ab(a.\text{tg}^2\alpha + b)} = \frac{ab(1 + \text{tg}^2\alpha) + a^2.\text{tg}^2\alpha + b^2}{ab(a.\text{tg}^2\alpha + b)}$$

$$= \frac{(a + b)(a.\text{tg}^2\alpha + b)}{ab(a.\text{tg}^2\alpha + b)} = \frac{a + b}{ab}.$$

Ví dụ 5: Cho biểu thức:

$$A = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + m(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha).$$

Xác định m để A không phụ thuộc vào α, khi đó hãy tính giá trị của A.

Giải

Ta có:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$
$$= 1 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha.$$
$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha.$$

Suy ra:

$$A = 1 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha + m(1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha)$$
$$= m + 1 - (3 + 2m)\sin^2\alpha.\cos^2\alpha.$$

Do đó để A không phụ thuộc α điều kiện là:

$$3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Vậy với $m = -\frac{3}{2}$ thì A không phụ thuộc α và khi đó $A = -\frac{1}{2}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

a. $A = \sin^8\alpha + \cos^8\alpha - 2(1 - \sin^2\alpha.\cos^2\alpha)^2$.

b. $B = 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$.

Bài tập 2: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

a. $A = \sin^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$.

b. $B = \sin^8\alpha + \cos^8\alpha - 2(\sin^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)^2$.

Bài tập 3: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

a. $A = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1)(tg^2\alpha + cotg^2\alpha + 2)$

b. $B = \dfrac{(1 - tg^2\alpha)^2}{tg^2\alpha} - \dfrac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$.

c. $C = \dfrac{tg^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{cotg^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

d. $D = \dfrac{1 - \sin^6\alpha}{\cos^6\alpha} - \dfrac{3tg^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Bài tập 4: Cho biểu thức:

$$A = a(\cos^8\alpha - \sin^8\alpha) + 4(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + b.\sin^4\alpha.$$

Xác định a, b để A không phụ thuộc vào α, khi đó hãy tính giá trị của A.

Bài toán 6: Tính giá trị của biểu thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng hệ thức cơ bản và các hệ quả (xét minh hoạ với $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$):

Dạng 1: Giả sử biết $\cos\alpha$, ta được:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\ ,$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ hoặc } \text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}.$$

Dạng 2: Giả sử biết $\sin\alpha$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$, thì $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha \ge 0$ do đó:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}\ ,$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\text{hoặc } \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \text{cotg}^2\alpha \Rightarrow \text{cotg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1}\ .$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ hoặc } \text{tg}\alpha = \frac{1}{\cot\text{g}\alpha}.$$

Trường hợp 2: Nếu $90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$, thì $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha \le 0$ do đó:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}\ ,$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ hoặc } \text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}.$$

Dạng 3: Giả sử biết $\text{tg}\alpha$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $\text{tg}\alpha \ge 0 \Leftrightarrow 0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$, thì $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\text{cotg}\alpha \ge 0$ do đó:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \text{tg}\alpha.\cos\alpha,\ \text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}.$$

Trường hợp 2: Nếu $\text{tg}\alpha \le 0 \Leftrightarrow 90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$, thì $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha \le 0$ do đó:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \text{tg}\alpha.\cos\alpha,\ \text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}.$$

Dạng 4: Giả sử biết $\text{cotg}\alpha$, tương tự dạng 3.

Dạng 5: Giả sử biết giá trị của một biểu thức lượng giác, cần tính giá trị của các hàm số lượng giác của một góc α, ta lựa chọn một trong các hướng sau:

Hướng 1: Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng chỉ chứa một hàm lượng giác rồi thực hiện phép đặt ẩn phụ (nếu cần) để giải một phương trình đại số.

Hướng 2: Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng tích $A.B = 0$.

Hướng 3: Sử dụng bất đẳng thức để phép đánh giá.

Dạng 6: Giả sử biết giá trị của một biểu thức lượng giác (ký hiệu (1)), cần tính giá trị của biểu thức lượng giác khác (ký hiệu (2)), ta lựa chọn một trong các hướng sau:

Hướng 1: Biến đổi (1) rồi thay vào (2).

Hướng 2: Biến đổi (2) rồi sử dụng (1).

Hướng 3: Biến đổi đồng thời (1) và (2) dẫn tới biểu thức trung gian (3).

Hướng 4: Sử dụng phương pháp giải phương trình để tính các giá trị đơn.

Ví dụ 1: Biết $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

a. Tính $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha$.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\text{cotg}\alpha + \text{tg}\alpha}{\text{cotg}\alpha - \text{tg}\alpha}$.

Giải

a. Ta có:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4},$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{4}{3}.$$

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$A = \frac{\text{cotg}\alpha + \text{tg}\alpha}{\text{cotg}\alpha - \text{tg}\alpha} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}} = \frac{25}{7}.$$

Cách 2: Thực hiện độc lập với a), ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \frac{\text{cotg}\alpha + \text{tg}\alpha}{\text{cotg}\alpha - \text{tg}\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)} = \frac{1}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{1}{2\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1} = \frac{25}{7}.$$

Nhận xét:

1. Người ta có thể dễ dàng mở rộng cho ví dụ trên vẫn với yêu cầu a), b), chỉ có điều điều kiện $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ được thay bởi:

$$5\cos^2\alpha - 14\cos\alpha + 8 = 0. \qquad (*)$$

Khi đó, bằng cách đặt x = cosα, điều kiện $|x| \le 1$, ta được:

$$(*) \Leftrightarrow 5x^2 - 14x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4/5 \\ x = 2 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

2. Việc trình bày câu b) trong ví dụ trên theo hai cách với mục đích giúp các em học sinh tiếp cận dần với tính đa dạng trong biến đổi lượng giác cũng như tính độc lập khi tách bài toán làm hai ví dụ riêng biệt.

Ví dụ 2: Biết $\text{tg}\alpha = -2$, với α là góc của một tam giác.

a. Tính cosα, sinα.

b. Tính giá trị của biểu thức $C = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha}$.

Giải

a. Vì $\text{tg}\alpha = -2 < 0$ nên $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, tức là $\cos\alpha < 0$ do đó:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \text{tg}\alpha.\cos\alpha = -2.(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$C = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}} = 0.$$

Cách 2: Thực hiện độc lập với a), ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$C = \frac{\frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha - 2\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\text{tg}\alpha + 2}{\text{tg}\alpha - 2} = 0.$$

Chú ý:

1. Người ta có thể dễ dàng mở rộng bằng cách thay đổi điều kiện ban đầu như

$$\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = -2\cos\alpha \Leftrightarrow \text{tg}\alpha = -2.$$

2. Như vậy thông qua các ví dụ trên chúng ta đã làm quen được với 4 dạng toán 1; 2, 3, 4 được trình bày trong bài toán cơ bản, các ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ cho dạng 5 và 6.

Ví dụ 3: Cho:

$$\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha = 2. \qquad (1)$$

a. Tính cosα, sinα, tgα, cotgα.

b. Tính giá trị của biểu thức $E = \dfrac{\sin\alpha.\cos\alpha}{\text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha}$. (2)

Giải

a. Nhận xét rằng tgα, cotgα luôn cùng dấu, do đó từ (1) suy ra tgα, cotgα > 0.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha \geq 2\sqrt{\text{tg}\alpha.\text{cotg}\alpha} = 2,$$

do đó để có được (1) thì dấu " = " phải xảy ra trong bất đẳng thức trên

$$\Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \text{cotg}\alpha \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \text{tg}\alpha = \text{cotg}\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^0\text{, từ đó } \cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$E = \frac{\sin\alpha.\cos\alpha}{\text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+1} = \frac{1}{4}.$$

Cách 2: Thực hiện độc lập với a), ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha = 2 \Leftrightarrow (\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha + 2\text{tg}\alpha.\text{cotg}\alpha = 4 \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha = 2. \qquad (3)$$

$$2 = \text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha.\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha.\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha.\cos\alpha = \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Thay (3), (4) vào (2), ta được:

$$E = \frac{\sin\alpha.\cos\alpha}{\text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

Chú ý:

1. Lời giải trong cách 2 của câu b) được sử dụng trong trường hợp tổng quát tgα + cotgα = m.

2. Nếu các em học sinh chưa thật thành thạo với việc sử dụng bất đẳng thức thì có thể giải (1) như phương trình bậc hai theo tgα, cụ thể:

Đặt t = tgα, khi đó (1) được biến đổi thành:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\alpha = 1$$

từ đó suy ra:

$$\alpha = 45^0 \Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } \text{cotg}\alpha = 1.$$

Ví dụ 4: Cho:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}. \qquad (1)$$

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $cotg\alpha$.

b. Tính giá trị của biểu thức $F = \sin^5\alpha + \cos^5\alpha$.

Giải

a. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi (1) về dạng:

$$\sin\alpha = \sqrt{2} - \cos\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = (\sqrt{2} - \cos\alpha)^2 \text{, bởi } \sin\alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2\alpha = 2 - 2\sqrt{2}\cos\alpha + \cos^2\alpha \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow tg\alpha = cotg\alpha = 1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = (1.\sin\alpha + 1.\cos\alpha)^2 \leq (1 + 1)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2$$

$$\Leftrightarrow |\sin\alpha + \cos\alpha| \leq \sqrt{2}.$$

Do đó, để có được (1) thì dấu " = " phải xảy ra trong bất đẳng thức trên

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \Leftrightarrow tg\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^0,$$

từ đó $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $cotg\alpha = 1$.

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$F = \sin^5\alpha + \cos^5\alpha = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Cách 2: Thực hiện độc lập với a), ta biến đổi biểu thức về dạng:

Ta có:

$$F = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^3\alpha.\cos\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha - \sin\alpha.\cos^3\alpha + \cos^4\alpha)$$

$$= (\sin\alpha + \cos\alpha)[(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - \sin\alpha.\cos\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha]$$

$$= (\sin\alpha + \cos\alpha)[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha]$$

$$= (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin^2\alpha.\cos^2\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha). \qquad (3)$$

Từ giả thiết, ta được:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha.\cos\alpha = \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Thay (1), (4) vào (3), ta được:

$$M = \sqrt{2}.[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}] = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Chú ý:

1. Lời giải trong cách 1 của câu a) được sử dụng trong trường hợp tổng quát $a.\sin\alpha + b.\cos\alpha = c$.
2. Lời giải trong cách 2 của câu b) được sử dụng trong trường hợp tổng quát
   a. $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.
   b. $\sin\alpha.\cos\alpha = m$.

Ví dụ 5: Cho:

$$3\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sin^4\alpha + 3\cos^4\alpha.$$

Giải

Đặt $t = \sin^2\alpha$, với $0 \le t \le 1$, khi đó (1) được biến đổi về dạng:

$$3(\sin^2\alpha)^2 - (1 - \sin^2\alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - (1 - t)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 4t - 3 = 0 \overset{0\le t\le 1}{\Leftrightarrow} t = \frac{1}{2}.$$

Khi đó:

$$A = (\sin^2\alpha)^2 + 3(1 - \sin^2\alpha)^2 = t^2 + 3(1 - t)^2 = 1.$$

Ví dụ 6: Tính cosα, sinα, tgα, cotgα, biết:

$$3(\cos\alpha - 3\sin\alpha - 1) = \text{cotg}\alpha, \text{ với } 0 < \alpha < 180^0. \qquad (1)$$

Giải

Ta biến đổi (1) về dạng:

$$3(\cos\alpha - 3\sin\alpha) - (\text{cotg}\alpha - 3) = 0 \Leftrightarrow 3\sin\alpha.(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 3) - (\text{cotg}\alpha - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\sin\alpha - 1)(\text{cotg}\alpha - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{1}{3} \\ \text{cotg}\alpha = 3 \end{array}\right..$$

- Với $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, ta có: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ và } \text{cotg}\alpha = 2\sqrt{2} \\ \cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{tg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ và } \text{cotg}\alpha = -2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

- Với $\text{cotg}\alpha = 3$: *Bạn đọc tự làm.*

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Biết $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

a. Tính $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{5\cot g\alpha + 4\text{tg}\alpha}{5\cot g\alpha - 4\text{tg}\alpha}$.

Bài tập 2: Biết $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, tính giá trị của biểu thức:

$$B = \text{cotg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Bài tập 3: Biết $\text{cotg}\alpha = 3$.

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

b. Tính giá trị của biểu thức $C = \frac{1}{\cos^2\alpha - \cos\alpha.\sin\alpha + \sin^2\alpha}$.

Bài tập 4: Biết $\text{tg}\alpha + 2\text{cotg}\alpha = 3$. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha$.

Bài tập 5: Biết $\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$.

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha$.

b. Tính giá trị của biểu thức $G = \sin^4\alpha + \cos^2\alpha$.

Bài tập 6: Biết $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}$.

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha$.

b. Tính giá trị của biểu thức $F = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

Bài tập 7: Biết $\sin\alpha + \cos\alpha = m$, tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \cos\alpha.\sin\alpha$.

b. $B = \cos\alpha - \sin\alpha$.

c. $C = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$.

d. $D = \text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha$.

e. $E = \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\text{tg}^2\alpha - 1}$.

Bài tập 5: Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha$, biết:

a. $a.\sin\alpha + b.\cos\alpha = 0$, với $a^2 + b^2 \neq 0$.

b. $(1 + \frac{1}{\cos\alpha})\sin\alpha + (1 + \frac{1}{\sin\alpha})\cos\alpha = 2 + \sqrt{2}$.

c. $5\sin\alpha - 20\cos\alpha = 4(\text{tg}\alpha - 4)$.

d. $49 - 50\sin\alpha.\cos\alpha = 12(\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha)$.

Bài tập 6: Biết $3\sin^4\alpha + 2\cos^4\alpha = \frac{98}{81}$, tính:

$$A = 2\sin^4\alpha + 3\cos^4\alpha.$$

Bài toán 7: Góc phụ, bù nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các hệ quả:

Hàm số lượng giác của hai góc bù nhau	*Hàm số lượng giác của hai góc phụ nhau*
a. $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$.	a. $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$.
b. $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$.	b. $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$.
c. $tg(180^0 - \alpha) = -tg\alpha$.	c. $tg(90^0 - \alpha) = cotg\alpha$.
d. $cotg(180^0 - \alpha) = -cotg\alpha$.	d. $cotg(90^0 - \alpha) = tg\alpha$.

Ví dụ 1: Biết $tg75° = 2 + \sqrt{3}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của:

a. Góc 105°.   b. Góc 15°.

Giải

a. Ta có:

$$tg105° = tg(180^0 - 75°) = -tg75° = -2 - \sqrt{3},$$

$$cotg105° = \frac{1}{tg105^0} = -\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2,$$

$$\cos105° = \cos(180^0 - 75°) = -\cos75^0. \qquad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha \Rightarrow \cos75^0 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 75^0}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\cos105° = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Khi đó, từ:

$$tg105° = \frac{\sin105^0}{\cos105^0}$$

$$\Rightarrow \sin105° = tg105°.\cos105° = (-2-\sqrt{3}).\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

b. Ta có:

$$cotg15^0 = cotg(90^0 - 75^0) = tg75° = 2 + \sqrt{3},$$

$$tg15° = \frac{1}{cot\,g15^0} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\sin15^0 = \sin(90^0 - 75^0) = \cos75° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$cotg15° = \frac{\cos15^0}{\sin15^0} \Rightarrow \cos15° = cotg15°.\sin15° = (2+\sqrt{3}).\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{1 - \cos^2(90^0 + \alpha)}{1 - \sin^2(90^0 - \alpha)} - \text{cotg}(90^0 - \alpha).\text{tg}(\alpha - 90^0).$$

Giải

Biến đổi A về dạng:

$$A = \frac{1 - \cos^2[180^0 - (90^0 - \alpha)]}{1 - \cos^2\alpha} - \text{tg}\alpha.\text{tg}[90^0 - (180^0 - \alpha)]$$

$$= \frac{1 - \cos^2(90^0 - \alpha)}{1 - \cos^2\alpha} - \text{tg}\alpha.\text{cotg}(180^0 - \alpha)$$

$$= \frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} + \text{tg}\alpha.\text{cotg}\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Chú ý: Thông các những phép biến đổi nhỏ trong ví dụ 2, các em học sinh hãy vẫn dụng nó để chứng minh các công thức khá quan trọng sau:

a. Cung hơn kém nhau 180^0

- $\sin(180^0 + x) = -\sin x$
- $\cos(180^0 + x) = -\cos x$
- $\text{tg}(180^0 + x) = \text{tg}x$
- $\text{cotg}(180^0 + x) = \text{cotg}x$

b. Cung hơn kém nhau 90^0

- $\sin(90^0 + x) = \cos x$
- $\cos(90^0 + x) = -\sin x$
- $\text{tg}(90^0 + x) = -\text{cotg}x$
- $\text{cotg}(90^0 + x) = -\text{tg}x$

Ví dụ 3: Tính tổng:

$$S = \cos 10^0 + \cos 30^0 + \ldots + \cos 150^0 + \cos 170^0.$$

Giải

Viết lại S dưới dạng:

$$S = (\cos 10^0 + \cos 170^0) + (\cos 30^0 + \cos 150^0) + $$
$$+ (\cos 50^0 + \cos 130^0) + (\cos 70^0 + \cos 110^0) + \cos 90^0$$
$$= (\cos 10^0 - \cos 10^0) + (\cos 30^0 - \cos 30^0) +$$
$$+ (\cos 50^0 - \cos 50^0) + (\cos 70^0 - \cos 70^0)$$
$$= 0.$$

Ví dụ 4: Tính tích:

$$P = \text{tg}1^0.\text{tg}2^0 \ldots \text{tg}88^0.\text{tg}89^0.$$

Giải

Viết lại P dưới dạng:

$$P = \text{tg}1^0.\text{tg}2^0 \ldots \text{tg}44^0.\text{tg}45^0.\text{tg}(90^0 - 44^0) \ldots \text{tg}(90^0 - 2^0).\text{tg}(90^0 - 1^0)$$
$$= \text{tg}1^0.\text{tg}2^0 \ldots \text{tg}44^0.1.\text{cotg}44^0 \ldots \text{cotg}2^0.\text{cotg}1^0 = 1.$$

Ví dụ 5: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

$$A = \frac{[1 - \cot g^2(90^0 + \alpha)]^2}{\cot g^2(\alpha - 90^0)} - \frac{1}{\sin^2(180^0 - \alpha).\sin^2(90^0 - \alpha)}. \quad (1)$$

Giải

Ta có:

$$\frac{[1 - \cot g^2(90^0 + \alpha)]^2}{\cot g^2(\alpha - 90^0)} = \frac{\{1 - \cot g^2[180^0 - (90^0 - \alpha)]\}^2}{\cot g^2[90^0 - (180^0 - \alpha)]}$$

$$= \frac{[1 - \cot g^2(90^0 - \alpha)]^2}{tg^2(180^0 - \alpha)} = \frac{(1 - tg^2\alpha)^2}{tg^2\alpha}$$

$$= (1 - tg^2\alpha)^2.cotg^2\alpha = (cotg\alpha - tg^2\alpha.cotg\alpha)^2$$

$$= (cotg\alpha - tg\alpha)^2 = cotg^2\alpha + tg^2\alpha - 2$$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 - 2$$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} - 4. \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sin^2(180^0 - \alpha).\sin^2(90^0 - \alpha)} = \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $A = -4$.

Ví dụ 6: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 2\sin(\frac{\pi}{6} + k\pi)$, với $k \in \mathbf{Z}$.

b. $B = \dfrac{4\sin^2(\alpha - \frac{k\pi}{2})}{tg(\alpha + \frac{k\pi}{2}).\cot g\alpha}$, với $k \in \mathbf{Z}$ và $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Giải

a. Ta xét hai trường hợp cho k chẵn và k lẻ:

- Với $k = 2l, l \in \mathbf{Z}$, ta được:

$$A = 2\sin(\frac{\pi}{6} + 2l\pi) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2.\frac{1}{2} = 1.$$

- Với $k = 2l + 1, l \in \mathbf{Z}$, ta được:

$$A = 2\sin[\frac{\pi}{6} + (2l + 1)\pi] = 2\sin(\frac{7\pi}{6} + 2l\pi) = 2.(-\frac{1}{2}) = -1.$$

Vậy:

$$A = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = 2l \\ -1 & \text{nếu } k = 2l+1 \end{cases}, \text{ với } l \in \mathbf{Z}.$$

b. Ta xét bốn trường hợp cho k:

- Với $k = 4l, l \in \mathbf{Z}$, ta được:

$$B = \frac{4\sin^2(\alpha - 2l\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha + 2l\pi).\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{4\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha} = 4\sin^2\alpha = 4\sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$= 4.\frac{1}{2} = 2.$$

- Với $k = 4l + 1, l \in \mathbf{Z}$, ta được:

$$B = \frac{4\sin^2(\alpha - \frac{\pi}{2} - 2l\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2l\pi).\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{4\cos^2\alpha}{-\operatorname{cotg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha} = -4\sin^2\alpha$$

$$= -4\sin^2\frac{\pi}{4} = -4.\frac{1}{2} = -2.$$

- Với $k = 4l + 2, l \in \mathbf{Z}$, ta được:

$$B = \frac{4\sin^2(\alpha - \pi - 2l\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \pi + 2l\pi).\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{4\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha} = 4\sin^2\alpha = 4\sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$= 4.\frac{1}{2} = 2.$$

- Với $k = 4l + 3, l \in \mathbf{Z}$, ta được:

$$B = \frac{4\sin^2(\alpha - \frac{3\pi}{2} - 2l\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi + 2l\pi).\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{4\cos^2\alpha}{-\operatorname{cotg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha} = -4\sin^2\alpha$$

$$= -4\sin^2\frac{\pi}{4} = -4.\frac{1}{2} = -2.$$

Vậy:

$$B = \begin{cases} 2 & \text{nếu } k = 4l \ \vee\ k = 4l+2 \\ -2 & \text{nếu } k = 4l+1 \ \vee\ k = 4l+3 \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{nếu } k = 2l \\ -2 & \text{nếu } k = 2l+1 \end{cases}, \text{ với } l \in \mathbf{Z}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Biết $\sin\alpha = \frac{6}{7}$, với $90^0 < \alpha < 180^0$, tính giá trị các hàm số lượng giác của góc $180^0 - \alpha$.

Bài tập 2: Biết $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của các góc $90^0 - \alpha$ và $180^0 - \alpha$.

Bài tập 3: Biết $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của các góc $90^0 - \alpha$ và $180^0 - \alpha$.

Bài tập 4: Biết $\text{cotg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của $180^0 - \alpha$.

Bài tập 5: Rút gọn biểu thức:

a. $A = 2[\sin^6\alpha + \sin^6(90^0 - \alpha)] - 3[\sin^4(180^0 - \alpha) + \cos^4\alpha + 2]$.

b. $B = \frac{1 - \sin^2(180^0 - \alpha)}{1 - \sin^2(90^0 - \alpha)} - \text{cotg}(90^0 - \alpha).\text{cotg}(180^0 - \alpha)$.

c. $C = \frac{[\sin(-954^0) - \cos 1296^0].\text{tg}36^0}{\sin 504^0 - \cos(-234^0)}$.

d. $D = \frac{\text{tg}46^0 + \text{cotg}(-136^0).\sin 404^0}{\cos 316^0} - \text{tg}36^0.\text{tg}54^0$.

Bài tập 6: Rút gọn biểu thức:

a. $A = \sin^6(\alpha + \pi) + \cos^6(\alpha - \pi) - 2\sin^4(\alpha + 2\pi) - \sin^4(\alpha + \frac{3\pi}{2}) + \cos^2(\alpha - \frac{\pi}{2})$.

b. $B = [1 + \text{tg}^2(\alpha - \frac{9\pi}{2})][1 + \text{cotg}^2(\alpha - 5\pi)]$.

$\cos(\alpha + \frac{7\pi}{2}).\sin(3\pi - \alpha).\cos(\alpha - \frac{11\pi}{2}).\sin(\alpha - 7\pi)$.

Bài tập 7: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

a. $A = \cos^4(180^0 - \alpha) + \sin^2(180^0 - \alpha).\sin^2(90^0 - \alpha) + \cos^2(90^0 - \alpha)$.

b. $B = \frac{[1 - \text{cotg}^2(180^0 - \alpha)]^2}{\text{tg}^2(90^0 - \alpha)} - \frac{1}{\sin^2(180^0 - \alpha).\sin^2(90^0 - \alpha)}$.

Bài tập 8: Tính các tổng:

a. $S = \cos 20^0 + \cos 40^0 + ... + \cos 160^0 + \cos 180^0$.

b. $S = \text{tg}10^0 + \text{tg}30^0 + \text{tg}50^0 + \text{tg}70^0 + \text{tg}110^0 + \text{tg}130^0 + \text{tg}150^0 + \text{tg}170^0$.

c. $S = \sin^2 1^0 + \sin^2 2^0 + ... + \sin^2 180^0$.

d. $S = \cos^2 2^0 + \cos^2 4^0 + ... + \cos^2 90^0$.

Bài tập 9: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \cos(\frac{\pi}{6} + k\pi)$, với $k \in \mathbf{Z}$. b. $B = \text{cotg}(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3})$, với $k \in \mathbf{Z}$.

c. $C = \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}).\text{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})$, với $k \in \mathbf{Z}$.

CHỦ ĐỀ 2

CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. HÀM TUẦN HOÀN

Hàm số f(x) xác định trên tập hợp D gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại một số dương T sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

$$x - T \in D \text{ và } x + T \in D \qquad (1)$$
$$f(x + T) = f(x) \qquad (2)$$

Số nhỏ nhất (nếu có) trong các số T có các tính chất trên gọi là *chu kỳ cơ sở* của hàm tuần hoàn f(x).

Chú ý: Các dấu hiệu để biết hàm số f(x) không phải là hàm tuần hoàn

Hàm số f(x) không phải là hàm tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau bị vi phạm:

a. Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.

b. Tồn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$.

c. Phương trình $f(x) = k$ có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.

d. Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự $.. < x_n < x_{n+1} < ..$ mà

$$|x_n - x_{n+1}| \to 0 \text{ hay } \infty.$$

2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC BIẾN SỐ THỰC

2.1. Hàm số y = sinx

Ta có:

- Hàm số y = sinx là hàm số lẻ trên **R**.
- Hàm số y = sinx tuần hoàn với chu kỳ 2π.

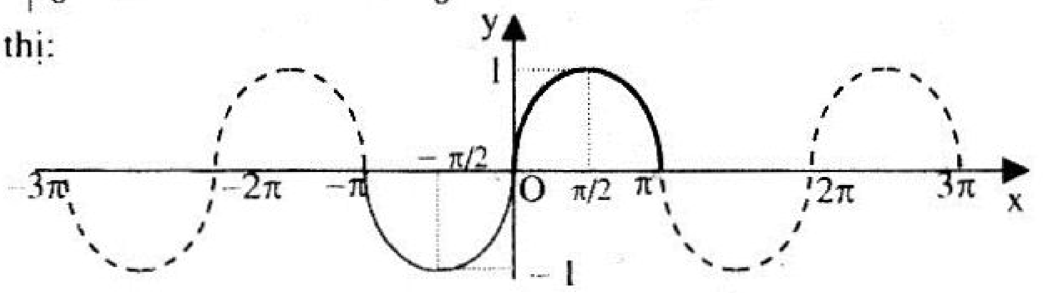
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = sinx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn [0, π], sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn [− π, π], cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài 2π, 4π,...

Xét hàm số y = sinx trên [0, π]

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

x	0		π/2		π
y	0	↗	1	↘	0

Đồ thị:



Từ đây, ta có nhận xét quan trọng là $|\sin x| \le 1$.

2.2. Hàm số y = cosx

Ta có:

- Hàm số y = cosx là hàm số chẵn trên **R**.
- Hàm số y = cosx tuần hoàn với chu kỳ 2π.

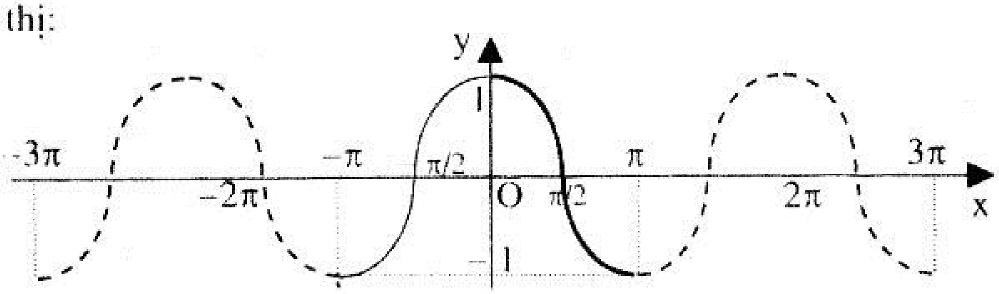
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = cosx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn [0, π], sau đó lấy đối xứng đồ thị qua trục Oy, ta được đồ thị trên đoạn [– π, π], cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài 2π, 4π,...

Xét hàm số y = cosx trên [0, π]

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

$$\begin{array}{c|lcr} x & 0 & & \pi \\ \hline y & 1 & \searrow & -1 \end{array}$$

Đồ thị:



Từ đây ta có nhận xét quan trọng là $|\cos x| \le 1$.

2.3. Hàm số y = tgx

Ta có:

- Hàm số y = tgx là hàm số lẻ trên $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- Hàm số y = tgx tuần hoàn với chu kỳ π.

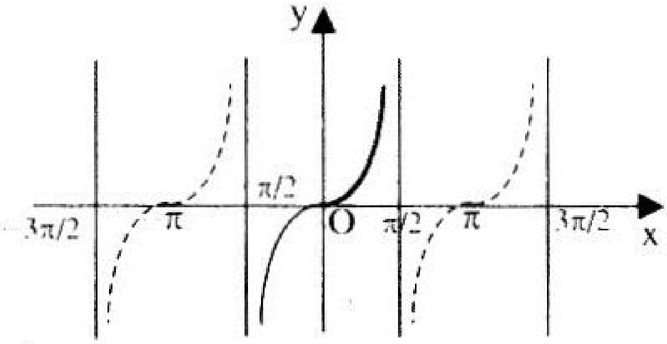
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = tgx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2})$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài π, 2π,...

Xét hàm số y = tgx trên $[0, \frac{\pi}{2})$

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

$$\begin{array}{c|lcr} x & 0 & & \pi/2 \\ \hline y & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$$

Đồ thị:



2.4. Hàm số y = cotgx

Ta có:

- Hàm số y = cotgx là hàm số lẻ trên **R**\{kπ, k ∈ **Z**}.
- Hàm số y = cotgx tuần hoàn với chu kỳ π.

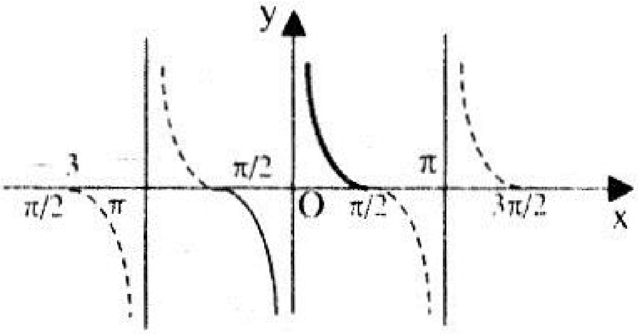
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = cotgx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $(0, \frac{\pi}{2}]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài π, 2π,...

Xét hàm số y = cotgx trên $(0, \frac{\pi}{2}]$

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

x	0		π/2
y	+∞	↘	0

Đồ thị:



II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tập xác định của hàm số lượng giác .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Muốn tìm tập xác định D của hàm số y = f(x) ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1. Tìm tập D của x để f(x) có nghĩa, tức là tìm:

$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \text{ có nghĩa}\}.$$

Phương pháp 2. Tìm tập E của x để f(x) không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là: $D = \mathbf{R}\backslash E$.

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1}{2\cos x - 1}$. b. $y = \dfrac{2}{(\text{tg}x - 1)(\sin 2x - 2)}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi:

$$2\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq \cos\dfrac{\pi}{3} \\ \cos x \neq \cos\dfrac{5\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x \neq \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{tg}x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{tg}x \neq 1 = \text{tg}\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in Z.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y = \sqrt{1 + \sin x - 2\cos^2 x}.$$

Giải

Hàm số xác định khi:

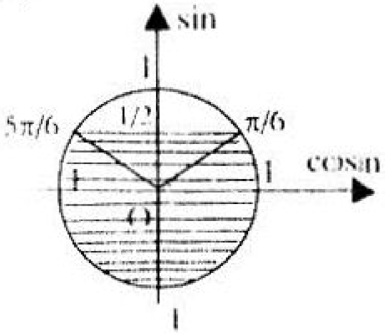
$$1 + \sin x - 2\cos^2 x \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \sin x - 2(1 - \sin^2 x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) \geq 0$$

$$\overset{|\sin x| \leq 1}{\Leftrightarrow} 2\sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$



Ví dụ 3: Cho hàm số

$$f(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x.\cos x}.$$

Tìm các giá trị của m để f(x) xác định với mọi x.

Giải

Ta có:

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x.\cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - m\sin 2x$$

$$= -\frac{1}{2}(\sin^2 2x + 2m\sin 2x - 2).$$

Đặt t = sin2x, điều kiện $-1 < t < 1$, ta được: $g(t) = t^2 + 2mt - 2$.

Để f(x) xác định ∀x thì:

$$g(t) < 0,\ \forall t \in [-1, 1] \Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) < 0 \\ g(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m < \frac{1}{2}.$$

Vậy, với $-\frac{1}{2} < m \le \frac{1}{2}$ hàm số f(x) xác định với mọi x.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1}{2\sin x - \sqrt{3}}$. b. $y = \dfrac{1}{4 - 5\cos x - 2\sin^2 x}$.

Bài tập 2: Tìm tập xác định của hàm số: $y = \dfrac{1}{\cot gx - \sqrt{3}}$.

Bài tập 3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{-2\cos x - \sqrt{2}}$. b. $Y = \sqrt{\dfrac{\cos x}{1 + 2\cos x} - \dfrac{1 - \cos x}{1 - 2\cos x}}$.

Bài tập 4: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1}{\sqrt{-\cot gx - \sqrt{3}}}$. b. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{tg^2 x - 2}{tg^2 x - 1}}}$.

Bài toán 2: Tính tuần hoàn của các hàm số lượng giác .

• PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để chứng minh hàm số y = f(x) tuần hoàn, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xét hàm số y = f(x), tập xác định là D, ta cần dự đoán số thực dương T_0 sao cho:

Với mọi $x \in D$, ta có: $x - T_0 \in D$ và $x + T_0 \in D$ (1)

$f(x + T_0) = f(x)$ (2)

Bước 2: Vậy hàm số y = f(x) là tuần hoàn.

2. Chứng minh rằng T_0 là chu kỳ của hàm số, tức là chứng minh T_0 là số nhỏ nhất (1), (2), ta thực hiện phép chứng minh bằng phản chứng theo các bước:

Bước 1: Giả sử có số T sao cho $0 < T < T_0$ thoả mãn tính chất (2):

$\forall x \in D,\ f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \ldots$

$\Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết $0 < T < T_0$.

Bước 2: Mâu thuẫn này chứng tỏ T_0 là số dương nhỏ nhất thoả mãn (2).

Bước 3: Vậy hàm số y = f(x) là tuần hoàn với *chu kỳ cơ sở* T_0.

3. Xét tính tuần hoàn của các hàm số lượng giác, chúng ta sử dụng các kết quả:

a. Hàm số y = sinx và y = cosx, tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Mở rộng: Hàm số $y = \sin(ax + b)$ và $y = \cos(ax + b)$ với $a \neq 0$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{a}$.

b. Hàm số $y = \text{tg}x$ và $y = \text{cotg}x$, tuần hoàn với chu kỳ π.

Mở rộng: Hàm số $y = \text{tg}(ax + b)$ và $y = \text{cotg}(ax + b)$ với $a \neq 0$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{a}$.

cùng với kết quả của định lý:

Định lý 1: Cho cặp hàm số $f(x)$, $g(x)$ tuần hoàn trên tập M có các chu kỳ lần lượt là a và b với $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$. Khi đó, các hàm số: $F(x) = f(x) + g(x)$, $G(x) = f(x).g(x)$, cũng tuần hoàn trên M.

Chứng minh

Từ giả thiết $\exists m, n \in \mathbf{N}^*$, $(m, n) = 1$ sao cho

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}.$$

Đặt $T = na = mb$, khi đó $\forall x \in M$ thì $x \pm T \in M$.

Ta có:
$$\begin{aligned} F(x + T) &= f(x + T) + g(x + T) = f(x + na) + g(x + mb) \\ &= f(x) + g(x) = F(x), \forall x \in M. \\ G(x + T) &= f(x + T)g(x + T) = f(x + na)g(x + mb) \\ &= f(x)g(x) = G(x), \forall x \in M. \end{aligned}$$

Vậy $F(x)$, $G(x)$ là những hàm tuần hoàn trên M.

Mở rộng: Hàm số $F(x) = mf(x) + ng(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T là bội số chung nhỏ nhất của a, b.

Ví dụ 1: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = \text{tg}(3x - \frac{\pi}{6})$.

b. $f(x) = 2\cos^2(2x + \frac{\pi}{3})$.

Giải

a. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{3}$.

b. Viết lại hàm số dưới dạng: $f(x) = 2\cos^2(2x + \frac{\pi}{3}) = 1 + \cos(4x + \frac{2\pi}{3})$.

Do đó $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

b. $f(x) = 2\text{tg}\frac{x}{2} - 3\text{tg}\frac{x}{3}$.

c. $f(x) = \cos x + 2\cos^2 x + 4\cos^3 x$.

Giải

a. Ta có:

- Hàm $\sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Hàm $\sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π.
- Hàm $\sin 3x$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$.

Do đó hàm f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π (là bội chung nhỏ nhất).

b. Ta có:

- Hàm $\text{tg}\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Hàm $\text{tg}\frac{x}{3}$ tuần hoàn với chu kỳ 3π.

Do đó hàm f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ 6π.

c. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$f(x) = \cos x + (1 + \cos 2x) + (\cos 3x - 3\cos x) = -2\cos x + \cos 2x + \cos 3x + 1.$$

Ta có:

- Hàm $\cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Hàm $\cos 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{2} = \pi$.
- Hàm $\cos 3x$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$.

Do đó hàm f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Ví dụ 3: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$. b. $f(x) = \sin(x^2)$.

Giải

a. Ta có:

- Hàm $\sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Hàm $\sin(x\sqrt{2})$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$.

Nhưng vì 1 và $\sqrt{2}$ không khả ước, nghĩa là không tồn tại bội số chung bé nhất đối với các chu kỳ 2π và $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$, nên hàm f(x) không tuần hoàn.

b. Hàm $f(x) = \sin(x^2)$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0:

$$\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \to 0 \text{ khi } k \to \infty \text{ (dấu hiệu d).}$$

Ví dụ 4: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = \text{tg}\sqrt{x}$. b. $f(x) = \sqrt{\text{tg}x}$.

Giải

a. Ta có:

- Hàm tgx tuần hoàn với chu kỳ π.
- Hàm $\text{tg}\sqrt{x}$ tuần hoàn với chu kỳ π^2.

Nhưng vì 1 và π không khả ước, nghĩa là không tồn tại bội số chung bé nhất đối với các chu kỳ π và π^2, nên hàm f(x) không tuần hoàn.

Chú ý: *Các em học sinh có thể chứng minh hàm số không tuần hoàn bằng phương pháp chứng minh phản chứng.*

b. Hàm số xác định với $k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

Ta có hàm tgx tuần hoàn do đó hàm f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ là số T nhỏ nhất thoả mãn:

$$f(x + T) = \sqrt{\text{tg}(x + T)} = \sqrt{\text{tg}x} = f(x) \Leftrightarrow \text{tg}(x + T) = \text{tg}x \Rightarrow T = \pi.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = 2\cos 2x$.

b. $f(x) = \text{cotg}\frac{x}{2} - 4\text{tg}\frac{x}{4}$.

c. $f(x) = \sin 2x + 2\cos 3x$.

d. $f(x) = 2\cos^2x + 3\cos^3x + 8\cos^4x$.

Bài tập 2: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = 2\cos^2x - 3\sin x + 2$. b. $f(x) = 2\cos x + \sin(x\sqrt{3})$.

Bài tập 3: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$. b. $f(x) = \sqrt{1 + \text{cotg}x}$.

Bài tập 4: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = \text{cotg}\sqrt{x}$. b. $f(x) = \cos(x^2)$.

Bài tập 5: Dùng định nghĩa tìm chu kỳ của hàm số:

$$f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Bài tập 6: Tồn tại hay không tồn tại một hàm số f(x) không phải là hằng số, tuần hoàn trên **R** nhưng không có chu kỳ cơ sở.

Bài toán 3: Tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó:

- Nếu D là tập đối xứng (tức là $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), ta thực hiện tiếp bước 2.
- Nếu D không phải là tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$, khi đó:

- Nếu $f(-x) = f(x)$ kết luận hàm số là hàm chẵn.
- Nếu $f(-x) = -f(x)$ kết luận hàm số là hàm lẻ.
- Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Chú ý: Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:

1. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
2. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn
3. Hàm số $y = \text{tg}x$ là hàm số lẻ.
4. Hàm số $y = \text{cotg}x$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 1: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $f(x) = |x|.\sin x$. b. $f(x) = \sin^{2005}x + \cos nx$.

Giải

a. Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x) = |-x|.\sin(-x) = -|x|.\sin x = -f(x)$.

Vậy, f(x) là hàm số lẻ.

Chú ý: Đôi khi người ta còn phát biểu bài toán dưới dạng:

" *Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|.\sin x$ có tâm đối xứng* "

b. Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x) = \sin^{2005}(-x) + \cos(-nx) = -\sin^{2005}x + \cos nx \neq \pm f(x)$.

Vậy, hàm số f(x) không chẵn cũng không lẻ.

Ví dụ 2: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x + \text{tg}x}$. b. $f(x) = \dfrac{\sin^{2004n}x + 2004}{\cos x}$, với $n \in \mathbb{Z}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x + \text{tg}x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq 0\\ (\cos x + 1)\sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy hàm số xác định trên $D = \mathbf{R} \backslash \{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ – là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sin(-x) + tg(-x)} = -\frac{x^2}{\sin x + tgx} = -f(x)$

Vậy, f(x) là hàm số lẻ.

b. Hàm số xác định trên $D = \mathbf{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x) = \frac{\sin^{2004n}(-x) + 2004}{\cos(-x)} = \frac{\sin^{2004n} x + 2004}{\cos x} = f(x)$.

Vậy, f(x) là hàm số chẵn.

Chú ý: Đôi khi người ta còn phát biểu bài toán dưới dạng:

" Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \frac{\sin^{2004n} x + 2004}{\cos x}$, *với* $n \in \mathbf{Z}$ *có trục đối xứng "*

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $f(x) = x.\sin x$. b. $f(x) = \cos^2 x + 4\sin x$.

Bài tập 2: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số:

$$f(x) = |x|.\cos x.$$

Bài tập 3: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{\cos^{2004n} x + 2004}{\sin x}$. b. $f(x) = \frac{x}{\sin x + tgx}$.

Bài tập 4: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{\cos x}{6x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 1}$ b. $f(x) = \sqrt[2005]{\frac{\sin x + \cot gx}{x^2 + 1 - \cos x}}$.

Bài toán 4: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:

a. Hàm số y = sinx

- Đồng biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ với $k \in \mathbf{Z}$.
- Nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ với $k \in \mathbf{Z}$.

b. Hàm số y = cosx

- Đồng biến trên khoảng $(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$ với $k \in \mathbf{Z}$.
- Nghịch biến trên khoảng $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ với $k \in \mathbf{Z}$.

c. Hàm số y = tgx

- Đồng biến trên khoảng $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ với $k \in \mathbf{Z}$.
- Nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbf{Z}$.

d. Hàm số y = cotgx

- Đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbf{Z}$.
- Nghịch biến trên khoảng $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ với $k \in \mathbf{Z}$.

2. Với các hàm số lượng giác phức hợp, để xét sự biến thiên của nó ta sử dụng định nghĩa.

3. Để vẽ đồ thị hàm số, thí dụ $y = |\cos x|$, thì ta sử dụng ngay đồ thị của hàm số cosx rồi thực hiện các phép đối xứng.

Ví dụ 1: Xét sự biến thiên của các hàm số sau trên một chu kỳ của nó:

a. $y = \text{tg}2x$.   b. $y = 1 - \sin x$.

Giải

a. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}] \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$.

Ta có, hàm số y = tg2x

- Đồng biến trên khoảng $(0, \frac{\pi}{4})$.
- Nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

b. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Ta có, hàm số y = sinx

- Đồng biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Do đó, hàm số $y = 1 - \sin x$

- Nghịch biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Ví dụ 2: Xét sự biến thiên của hàm số sau trên một chu kỳ của nó:

$$y = \sin x - \cos x.$$

Giải

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Ta có:

- Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 3: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = |\cos x|$. b. $y = \mathrm{tg}|x|$.

Giải

a. Ta có:

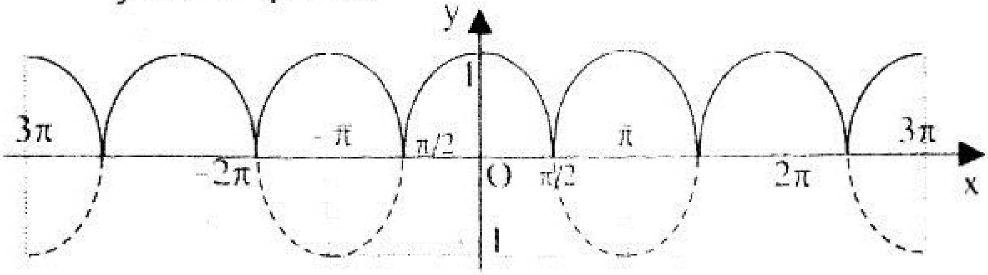
$$y = |\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{nếu } \cos x \geq 0 \\ -\cos x & \text{nếu } \cos x \leq 0 \end{cases}$$

Do đó, để vẽ đồ thị hàm số $y = |\cos x|$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng đồ thị hàm số $y = \cos x$.

Bước 2: Đồ thị hàm số $y = |\cos x|$ gồm hai phần:

- Giữ nguyên phần đồ thị ở phía trên Ox của đồ thị hàm số $y = \cos x$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị ở phía dưới Ox của đồ thị hàm số $y = \cos x$ qua Ox.

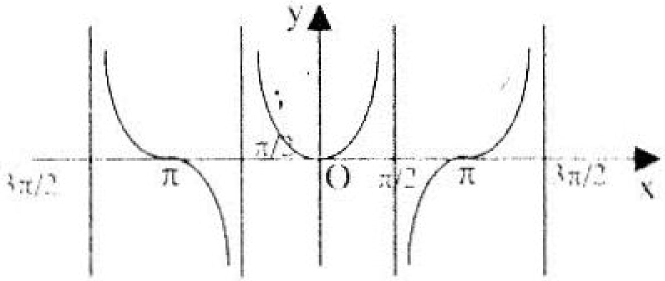


b. Ta có hàm số $y = \mathrm{tg}|x|$ là hàm chẵn, do đó để vẽ đồ thị hàm số $y = \mathrm{tg}|x|$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng đồ thị hàm số $y = \mathrm{tg}x$, với $x > 0$.

Bước 2: Đồ thị hàm số $y = \mathrm{tg}|x|$ gồm hai phần:

- Giữ nguyên phần đồ thị ở phía phải Oy của đồ thị hàm số $y = \mathrm{tg}x$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị trên qua Oy.



Ví dụ 4: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

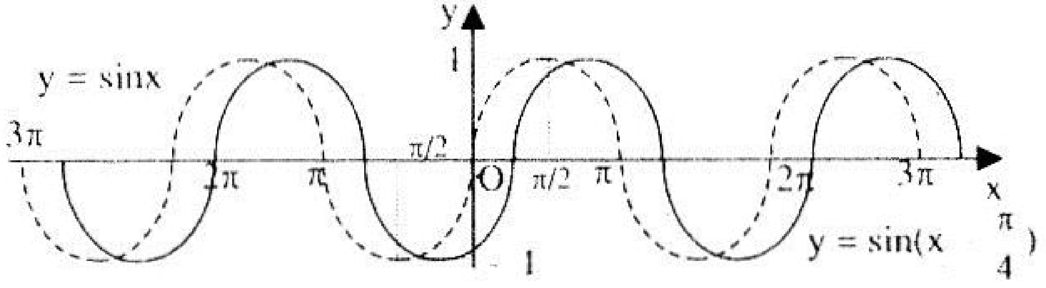
a. $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$.　　　　　b. $y = 1 + \cos x$.

Giải

a. Để vẽ đồ thị hàm số $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng đồ thị hàm số $y = \sin x$.

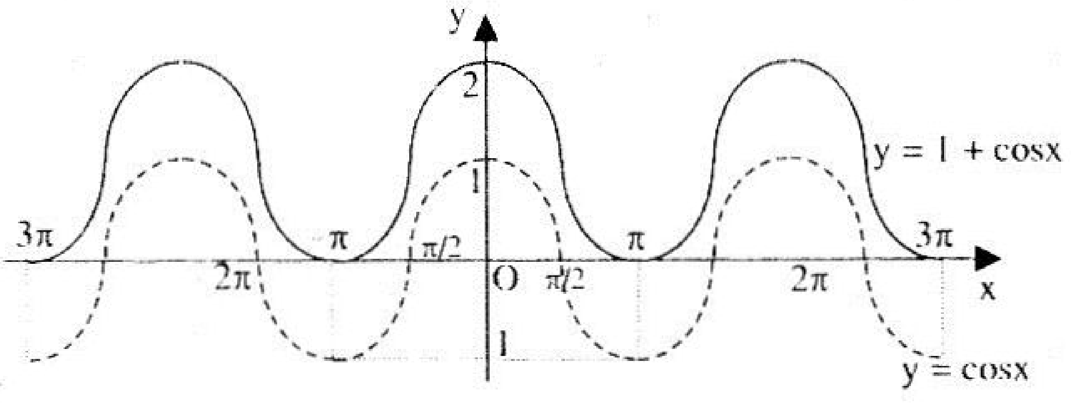
Bước 2: Đồ thị hàm số $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = \sin x$ theo trục Ox về bên phải một đoạn bằng $\frac{\pi}{4}$.



b. Để vẽ đồ thị hàm số $y = 1 + \cos x$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng đồ thị hàm số $y = \cos x$.

Bước 2: Đồ thị hàm số $y = 1 + \cos x$ được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = \cos x$ theo trục Oy lên trên 2 đơn vị.



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xét sự biến thiên của các hàm số sau trên một chu kỳ của nó:

a. $y = \cos 2x$.
b. $y = 1 - \cos x$.
c. $y = \text{cotg} 3x$.
d. $y = 1 - \cos 4x$.

Bài tập 2: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = |\sin x|$.
b. $y = \text{cotg}|x|$.
c. $y = \cos(-x)$.
d. $y = \text{tg}(-x)$.

Bài tập 3: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.
b. $y = \text{cotg}(x + \frac{\pi}{3})$.
c. $y = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$.
d. $y = \text{tg}(2x - \frac{\pi}{6})$.

Bài tập 4: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = 1 - \sin x$.
b. $y = \cos 2x$.
c. $y = 2 + \text{tg} x$.
d. $y = 2\text{cotg} 2x$.

Bài tập 5: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = (1 - \sin x).\cos x$.
b. $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.
c. $y = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$.
d. $y = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.

Bài toán 5: So sánh giá trị của các hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng:

1. Dấu của các giá trị lượng giác
2. Sự biến thiên của các hàm số lượng giác.
3. Phần tử trung gian.

Ví dụ 1: So sánh các cặp số sau:

a. $\sin 63^0$ và $\sin 72^0 15'$.
b. $\sin 142^0 20'$ và $\sin 154^0 10'$.
c. $\sin 51^0 18'$ và $\sin 137^0 12'$.

Giải

a. Ta có $0^0 < 63^0 < 72^0 15' < 90^0$ và miền này hàm số sinx đồng biến, do đó:
$\sin 63^0 < \sin 72^0 15'$.

b. Ta có $90^0 < 142^0 20' < 154^0 10' < 180^0$ và miền này hàm số sinx nghịch biến, do đó:
$\sin 142^0 20' > \sin 154^0 10'$.

c. Ta có:

- $0^0 < 45^0 < 51^0 18' < 90^0$ và miền này hàm số sinx đồng biến, do đó:

$$\sin 51^0 18' > \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

- $90^0 < 135^0 < 137^012' < 180^0$ và miền này hàm số sinx nghịch biến, do đó:

$$\sin 137^012' < \sin 135^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sin 51^018' > \sin 137^012'$.

Ví dụ 2: So sánh các cặp số sau:

a. $\cos 13^0$ và $\cos 69^0$. b. $\cos 92^012'$ và $\sin 11^0$.

c. $\cos 27^0$ và $\sin 59^0$.

Giải

a. Ta có hàm số cosx nghịch biến trên $[0^0, 180^0]$, do đó: $\cos 13^0 > \cos 69^0$.

b. Ta có: $\begin{cases} \cos 92^012' < 0 \\ \sin 11^0 > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos 92^012' < \sin 11^0$.

c. Ta có: $\begin{cases} \cos 27^0 > \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 59^0 < \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos 27^0 > \sin 59^0$.

Ví dụ 3: So sánh các cặp số sau:

a. $tg13^0$ và $tg37^0$. b. $tg92^012'$ và $tg111^0$.

c. $tg47^0$ và $tg93^0$.

Giải

a. Ta có $0^0 < 13^0 < 37^0 < 90^0$ và miền này hàm số tgx đồng biến, do đó: $tg13^0 < tg37^0$.

b. Ta có $90^0 < 92^012' < 111^0 < 180^0$ và miền này hàm số tgx đồng biến, do đó: $tg92^012' < tg111^0$.

c. Ta có: $\begin{cases} tg47^0 > 0 \\ tg93^0 < 0 \end{cases} \Rightarrow tg47^0 > tg93^0$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: So sánh các cặp số sau:

a. $\sin 56^0$ và $\sin 71^013'$. b. $\sin 132^021'$ và $\sin 144^011'$.

Bài tập 2: So sánh các cặp số sau:

a. $\sin 31^018'$ và $\sin 132^01'$. b. $\cos 113^0$ và $\cos 39^0$.

Bài tập 3: So sánh các cặp số sau:

a. $\cos 102^0$ và $\sin 111^0$. b. $\cos 47^0$ và $\sin 46^0$.

Bài tập 4: So sánh các cặp số sau:

a. $tg133^0$ và $tg145^0$. b. $cotg41^0$ và $cotg33^023'$.

c. $tg46^0$ và $cotg47^0$.

CHỦ ĐỀ 3

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CÔNG THỨC CỘNG

a. $\cos(x + y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

b. $\cos(x - y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

c. $\sin(x + y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$

d. $\sin(x - y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$

e. $\text{tg}(x + y) = \dfrac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x.\text{tg}y}$

f. $\text{tg}(x - y) = \dfrac{\text{tg}x - \text{tg}y}{1 + \text{tg}x.\text{tg}y}$

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

a. $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

b. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
$= 1 - 2\sin^2 x$

c. $\text{tg}2x = \dfrac{2\text{tg}x}{1 - \text{tg}^2 x}$

3. CÔNG THỨC NHÂN BA

a. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

b. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

c. $\text{tg}3x = \dfrac{(3 - \text{tg}^2 x)\text{tg}x}{1 - 3\text{tg}^2 x}$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

a. $\cos x.\cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)].$

b. $\sin x.\sin y = \dfrac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)].$

c. $\sin x.\cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)].$

d. $\cos x.\sin y = \dfrac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y)].$

5. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

a. $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2}.$

b. $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x + y}{2}\sin\dfrac{x - y}{2}.$

c. $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2}.$

d. $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x + y}{2}\sin\dfrac{x - y}{2}.$

e. $tgx + tgy = \frac{\sin(x+y)}{\cos x.\cos y}$, g. $cotgx + cotgy = \frac{\sin(x+y)}{\sin x.\sin y}$.

f. $tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y}$. h. $cotgx - cotgy = \frac{\sin(y-x)}{\cos x.\cos y}$.

6. CÔNG THỨC HẠ BẬC

a. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. c. $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.

b. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. d. $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$.

7. CÔNG THỨC RÚT GỌN **asinx + bcosx**

Ta có:

a. $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\alpha)$ với $cotg\alpha = \frac{b}{a}$.

$= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\alpha)$ với $tg\alpha = \frac{a}{b}$.

b. $a\sin x - b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x-\alpha)$ với $cotg\alpha = \frac{b}{a}$.

$= -\sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x+\alpha)$ với $tg\alpha = \frac{a}{b}$.

Hệ quả:

a. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$.

b. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$.

c. Mở rộng

$cotgx + tgx = \frac{2}{\sin 2x}$

$cotgx - tgx = 2cotg2x$.

8. CÔNG THỨC TÍNH **sinα, cosα, tgα** THEO **tg**$\frac{\alpha}{2}$

Nếu đặt $t = tg\frac{\alpha}{2}$, ta được:

- $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$,
- $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,
- $tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Biến đổi biểu thức lượng giác thành tổng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các công thức lượng giác.

Ví dụ 1: Biến đổi các biểu thức sau thành tổng:

a. $A = \sin a.\sin 2a.\sin 3a$. b. $B = 4\cos a.\cos 2a.\sin\frac{5a}{2}$.

Giải

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \frac{1}{2}(\cos a - \cos 3a).\sin 3a = \frac{1}{2}(\cos a.\sin 3a - \cos 3a.\sin 3a)$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\sin 2a + \sin 4a) - \frac{1}{2}\sin 6a] = \frac{1}{4}(\sin 2a + \sin 4a - \sin 6a).$$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = 2(\cos 3a + \cos a).\sin\frac{5a}{2} = 2\cos 3a.\sin\frac{5a}{2} + \cos a.\sin\frac{5a}{2}$$

$$= \sin\frac{11a}{2} - \sin\frac{a}{2} + \sin\frac{7a}{2} + \sin\frac{3a}{2}.$$

Ví dụ 2: Biến đổi các biểu thức sau thành tổng:

a. $A = 8\sin(a - \frac{\pi}{6}).\cos 2a.\sin(a + \frac{\pi}{6})$.

b. $B = 4\cos(a - b).\cos(b - c).\cos(c - a)$.

Giải

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = 8\sin(a - \frac{\pi}{6}).\sin(a + \frac{\pi}{6}).\cos 2a = 4[\cos(-\frac{\pi}{3}) - \cos 2a].\cos 2a$$

$$= 2\cos 2a - 4(1 + \cos 4a) = 2\cos 2a - 4 - 4\cos 4a.$$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = 2[\cos(a - c) + \cos(a - 2b + c)].\cos(c - a)$$

$$= 2\cos^2(a - c) + 2\cos(a - 2b + c).\cos(c - a)$$

$$= 1 + \cos(2a - 2c) + \cos(-2b + 2c) + \cos(2a - 2b)$$

$$= 1 + \cos(2a - 2c) + \cos(2b - 2c) + \cos(2a - 2b)$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Biến đổi các biểu thức sau thành tổng:

a. $A = \cos a.\cos 2a.\cos 3a$. b. $B = 2\sin a.\sin 2a.\cos\frac{5a}{2}$.

Bài tập 2: Biến đổi biểu thức sau thành tổng:

$$P = 4\cos(a - \frac{\pi}{3}).\sin 2a.\cos(a + \frac{\pi}{3}).$$

Bài toán 2: Biến đổi biểu thức lượng giác thành tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Việc biến đổi biểu thức lượng giác về dạng tích phụ thuộc vào các phép biến đổi dạng:

Dạng 1: Biến đổi tổng, hiệu thành tích.

Dạng 2: Biến đổi tích thành tổng.

Dạng 3: Lựa chọn phép biến đổi cho cos2x.

Dạng 4: Phương pháp luận hệ số.

Dạng 5: Phương pháp hằng số biến thiên.

Dạng 6: Phương pháp nhân.

Dạng 7: Sử dụng các phép biến đổi hỗn hợp.

Ví dụ 1: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a + \sin 6a.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = (\sin a + \sin 6a) + (\sin 2a + \sin 5a) + (\sin 3a + \sin 4a)$$

$$= 2\sin\frac{7a}{2}.\cos\frac{5a}{2} + 2\sin\frac{7a}{2}.\cos\frac{3a}{2} + 2\sin\frac{7a}{2}.\cos\frac{a}{2}$$

$$= 2(\cos\frac{5a}{2} + \cos\frac{3a}{2} + \cos\frac{a}{2})\sin\frac{7a}{2}$$

$$= 2(2\cos\frac{3a}{2}.\cos a + \cos\frac{3a}{2})\sin\frac{7a}{2}$$

$$= 2(2\cos a + 1).\cos\frac{3a}{2}.\sin\frac{7a}{2} = 4(\cos a + \frac{1}{2}).\cos\frac{3a}{2}.\sin\frac{7a}{2}$$

$$= 4(\cos a + \cos\frac{\pi}{3}).\cos\frac{3a}{2}.\sin\frac{7a}{2}$$

$$= 8\cos(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6}).\cos(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{6}).\cos\frac{3a}{2}.\sin\frac{7a}{2}.$$

Cách 2: Lựa chọn phép gom:

$A = (\sin a + \sin 2a) + (\sin 3a + \sin 4a) + (\sin 5a + \sin 6a)$ *Đề nghị bạn đọc.*

Cách 3: Lựa chọn phép gom:

$A = (\sin a + \sin 4a) + (\sin 2a + \sin 5a) + (\sin 3a + \sin 6a)$ *Đề nghị bạn đọc.*

Ví dụ 2: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = 1 + \sin a + \cos 3a - (\cos a + \sin 2a + \cos 2a).$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = (1 - \cos 2a) + \sin a + (\cos 3a - \cos a) - \sin 2a$$

$$= 2\sin^2 a + \sin a - 2\sin 2a.\sin a - 2\sin a.\cos a$$

$$= (2\sin a + 1 - 4\sin a.\cos a - 2\cos a).\sin a = (2\sin a + 1)(1 - 2\cos a).\sin a$$

$$= 4(\sin a + \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - \cos a).\sin a = 4(\sin a + \sin\frac{\pi}{6})(\cos\frac{\pi}{3} - \cos a).\sin a$$

$$= -16\sin(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{12}).\cos(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{12}).\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{a}{2}).\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{a}{2}).\sin a$$

Ví dụ 3: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = 2\cos\frac{a}{2}.\cos a.\cos\frac{3a}{2} - 2\sin\frac{a}{2}.\sin a.\sin\frac{3a}{2} - 1.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = (\cos 2a + \cos a).\cos a + (\cos 2a - \cos a).\sin a - 1$$

$$= \cos 2a.\cos a + \cos^2 a + \cos 2a.\sin a - \cos a.\sin a - 1$$

$$= \cos 2a.\cos a + 1 - \sin^2 a + \cos 2a.\sin a - \cos a.\sin a - 1$$

$$= (\cos a + \sin a).\cos 2a - (\sin a + \cos a).\sin a$$

$$= (\cos a + \sin a).(\cos 2a - \sin a)$$

$$= \sqrt{2}\sin(a + \frac{\pi}{4}).[\cos 2a - \cos(\frac{\pi}{2} - a)]$$

$$= -2\sqrt{2}\sin(a + \frac{\pi}{4}).\sin(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}).\sin(\frac{3a}{2} - \frac{\pi}{4}).$$

Ví dụ 4: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = 2\cos^3 a + \cos 2a + \sin a.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = 2\cos^3 a + 2\cos^2 a - 1 + \sin a = 2(\cos a + 1).\cos^2 a + \sin a - 1$$

$$= 2(\cos a + 1)(1 - \sin^2 a) + \sin a - 1$$

$$= (1 - \sin a)[2(\cos a + 1)(1 + \sin a) - 1]$$

$$= (1 - \sin a)[1 + 2\sin a.\cos a + 2(\sin a + \cos a)]$$

$$= (1 - \sin a)[(\sin a + \cos a)^2 + 2(\sin a + \cos a)]$$

$$= (1 - \sin a)(\sin a + \cos a)(\sin a + \cos a + 2).$$

Ví dụ 5: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = 4\sin 2a - 3\cos 2a - 3(4\sin a - 1) - 6\sin^2 a.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = 4\sin 2a - 3\cos 2a - 12\sin a + 3 - 6\sin^2 a$$

$$= 4\sin 2a - 3(1 - 2\sin^2 a) - 12\sin x + 3 - 6\sin^2 a$$

$$= 8\sin a.\cos a - 12\sin a = 4(2\cos a - 3)\sin a$$

Ví dụ 6: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = 5\sin 3a - 3\sin 5a.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = 2\sin 3a - 3(\sin 5a - \sin 3a) = 2(3\sin a - 4\sin^3 a) - 6\cos 4a.\sin a$$
$$= 2(3 - 4\sin^2 a - 3\cos 4a).\sin a$$
$$= 2[3 - 2(1 - \cos 2a) - 3(2\cos^2 2a - 1)].\sin a$$
$$= -4(3\cos^2 2a - \cos 2a + 1).\sin a.$$

Chú ý: Các em học sinh cũng có thể sử dụng phương pháp tách dần:

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$

$\sin 5a = \sin(a + 4a) = \sin a.\cos 4a + \cos a.\sin 4a$

$= \sin a.\cos 4a + 2\cos a.\cos 2a.\sin 2a = \sin a.\cos 4a + 4\cos^2 a.\cos 2a.\sin a.$

Ví dụ 7: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = \sin a.\cos a - 2(\mathrm{tg}a + \cos^2 a) + 4.$$

Giải

Nếu đặt t = 2, ta được:

$$A = t^2 - (\mathrm{tg}a + \cos^2 a)t + \sin a.\cos a.$$

Khi đó A là một tam thức bậc hai có:

$$\Delta_t = (\mathrm{tg}a + \cos^2 a)^2 - 4\sin a.\cos a = (\mathrm{tg}a + \cos^2 a)^2 - 4\mathrm{tg}a.\cos^2 a = (\mathrm{tg}a - \cos^2 a)^2,$$

do đó phương trình A = 0 có các nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{\mathrm{tg}a + \cos^2 a + (\mathrm{tg}a - \cos^2 a)}{2} = \mathrm{tg}a \\ t_2 = \dfrac{\mathrm{tg}a + \cos^2 a - (\mathrm{tg}a - \cos^2 a)}{2} = \cos^2 a \end{array}\right.$$

tức là A có thể được phân tích thành:

$$A = (t - \mathrm{tg}a)(t - \cos^2 a) = (2 - \mathrm{tg}a)(2 - \cos^2 a).$$

Ví dụ 8: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = \sin\frac{5a}{2} - 5\cos^3 a.\sin\frac{a}{2}, \text{ với } a \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Giải

Từ giả thiết $a \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ta được:

$$\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \cos\frac{a}{2} \neq 0.$$

Nhân cả hai vế của biểu thức với $2\cos\frac{a}{2} \neq 0$, ta được:

$$2A\cos\frac{a}{2} = 2\sin\frac{5a}{2}.\cos\frac{a}{2} - 10\cos^3 a.\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2} = \sin 3a + \sin 2a - 5\cos^3 a.\sin a$$
$$= 3\sin a - 4\sin^3 a + 2\sin a.\cos a - 5\cos^3 a.\sin a$$
$$= (3 - 4\sin^2 a + 2\cos a - 5\cos^3 a).\sin a$$

$$= (5\cos^3 a + 4\cos^2 a - 2\cos a - 1).\sin a$$

$$= 2(5\cos^2 a - \cos a - 1)(\cos a + 1)\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = (5\cos^2 a - \cos a - 1)(\cos a + 1)\sin\frac{a}{2}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = 2\cos 2a - \sqrt{3}$.

b. $B = \sin 3a - \cos a$.

c. $C = 1 - \text{tg}a$.

d. $D = 1 + 2\sin a - \cos 2a$.

e. $E = 1 + \cos a + \cos 2a$.

Bài tập 2: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = 2\sin^3 a - \cos 2a + \cos a$.

b. $B = 3(\text{cotg}a - \cos a) - 5(\text{tg}a - \sin a) - 2$.

c. $C = 9\sin a + 6\cos a - 3\sin 2a + \cos 2a - 8$.

Bài tập 3: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = 2\sin 2a - \cos 2a - 7\sin a + 2\cos a + 4$.

b. $B = 1 - \cos ax - \cos 2bx + \cos(a + 2b)x$.

c. $C = 8\cos(a + b + c).\cos(a - b + c).\cos(a - b - c).\cos(a + b - c)$.

Bài tập 4: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = \cos^4 a - \cos 2a + 2\sin^6 a$.

b. $B = \cos^2 a + \cos^3 a + 2\sin a - 2$.

c. $C = \sin^2 2a - 12(\cos^4 a + \text{tg}^2 a) + 36$.

Bài tập 5: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = \sin^8 a + \cos^8 a - 2(\sin^{10} a + \cos^{10} a)$.

b. $B = \cos^2 3a + \cos^2 2x - \sin^2 a$.

c. $C = \sin^2 3a - \cos^2 4a - \sin^2 5a + \cos^2 6a$.

Bài tập 6: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = (\sin a + 3).\sin^4\frac{a}{2} - (\sin a + 3).\sin^2\frac{a}{2} + 1$.

b. $B = \cos^5 a + \sin^7 a + \frac{1}{2}(\cos^3 a + \sin^5 a)\sin 2a - (\cos a + \sin a)$.

c. $C = 2(1 - 4\sin^2 a)\sin 3a - 1$, với $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 3: Rút gọn biểu thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các công thức lượng giác cùng các phép biến đổi lượng giác.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{tg(\frac{\pi}{4} - x).tg(\frac{\pi}{4} + x)}.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \frac{(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x.\cos^2 2x}{tg(\frac{\pi}{4} - x).\cot g[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + x)]} = \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x}{tg(\frac{\pi}{4} - x).\cot g(\frac{\pi}{4} - x)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x.$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức: $A = 4[\sin^4 x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4})] - 3$

từ đó suy ra giá trị của A với $x = \frac{\pi}{8}$.

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = 4[\frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 + \frac{1}{4}[1 + \cos(2x + \frac{\pi}{2})]^2] - 3$$

$$= (1 - \cos 2x)^2 + (1 - \sin 2x)^2 - 3 = 3 - 2(\cos 2x + \sin 2x) - 3$$

$$= -2\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}).$$

Suy ra với $x = \frac{\pi}{8}$, ta được:

$$A = -2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = -2\sqrt{2}.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x}}{\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}}$, với $-\frac{\pi}{4} < x < 0$.

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \frac{(\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x})^2}{(\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x})(\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x})}$$

$$= \frac{1 + \sin 2x + 2\sqrt{1 - \sin^2 2x} + 1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x - 1 + \sin 2x}$$

$$= \frac{1+\sqrt{\cos^2 2x}}{\sin 2x} = \frac{1+|\cos 2x|}{\sin 2x} \overset{-\frac{\pi}{4}<x<0}{=} \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin x.\cos x} = \text{cotgx}.$$

Chú ý: Người ta có thể sử dụng kết quả của ví dụ trên để tạo ra những yêu cầu khá thú vị, để minh hoạ ta xét bài toán:

Cho $t \in [-1, 1] \backslash \{0\}$ và thoả mãn:

$$tgx = \frac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}.$$

Chứng minh rằng $t = \sin 2x$.

Ta thực hiện như sau:

Trước hết:

$$\text{tgx} = \frac{(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})^2}{(\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t})(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})} = \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}.$$

Mặt khác:

$$\sin 2x = \frac{2\text{tgx}}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{2.\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}}{1+\left(\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^2} = \frac{2(1+\sqrt{1-t^2})t}{2(1+\sqrt{1-t^2})} = t.$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2\cos x}}}}_{n\text{ dấu căn}}, \text{ với } 0 < x < \pi.$$

Giải

Ta có:

$$2 + 2\cos x = 2(1 + \cos x) = 4\cos^2\frac{x}{2}$$

suy ra:

$$\sqrt{2+2\cos x} = \sqrt{4\cos^2\frac{x}{2}} \overset{0<x<\pi}{=} 2\cos\frac{x}{2}$$

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}}_{2\text{ dấu căn}} = 2\cos\frac{x}{2^2}$$

...

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2\cos x}}}}_{n\text{ dấu căn}} = 2\cos\frac{x}{2^n}.$$

Vậy:

$$A = \frac{1}{2}.2\cos\frac{x}{2^n} = \cos\frac{x}{2^n}.$$

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n a}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{1}{\sin 2^k a} = \frac{1 + \cos 2^k a - \cos 2^k a}{\sin 2^k a} = \frac{1 + \cos 2^k a}{\sin 2^k a} - \frac{\cos 2^k a}{\sin 2^k a}$$

$$= \frac{2\cos^2 2^{k-1} a}{2\sin 2^{k-1} a.\cos 2^{k-1} a} - \text{cotg}2^k a = \text{cotg}2^{k-1}a - \text{cotg}2^k a.$$

Suy ra:

$$A = \text{cotg}\frac{a}{2} - \text{cotg}a + \text{cotg}a - \text{cotg}2a + \ldots + \text{cotg}2^{n-1}a - \text{cotg}2^n a$$

$$= \text{cotg}\frac{a}{2} - \text{cotg}2^n a.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \left(\frac{1}{\cos 2x} + 1\right).\text{tg}x.$ b. $B = \cos 8x.\text{cotg}4x - \frac{\text{cot}\,g^2 2x - 1}{2\,\text{cot}\,g2x}$

Bài tập 2: Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin na.$ b. $B = \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos na.$

c. $C = \cos^2 a + \cos^2 2a + \ldots + \cos^2 na.$ d. $D = \sin^2 a + \sin^2 2a + \ldots + \sin^2 na.$

Bài tập 3: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 - \ldots - \sqrt{2 - 2\cos x}}}}_{\text{n dấu căn}}, \text{ với } 0 \le x \le 2\pi.$$

Bài tập 4: Rút gọn biểu thức:

a. $A = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1}.$

b. $B = \cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \ldots + (-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi}{2n+1}.$

c. $C = (1 - 2\cos a)(1 - 2\cos 2a)\ldots(1 - 2\cos 2^{n-1}a).$

d. $D = \frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}} + \frac{1}{4^2\cos^2\frac{a}{2^2}} + \ldots + \frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}.$

e. $E = (1 + \frac{1}{\cos 2a})(1 + \frac{1}{\cos 4a})\ldots(1 + \frac{1}{\cos 2^n a}).$

Bài tập 5: Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \frac{1}{\cos a.\cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a.\cos 3a} + \ldots + \frac{1}{\cos na.\cos(n+1)a}.$

b. $B = \frac{1}{\sin a.\sin 2a} + \frac{1}{\sin 2a.\sin 3a} + ... + \frac{1}{\sin na.\sin(n+1)a}$.

Bài tập 6: Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \text{tg}a + \frac{1}{2}\text{tg}\frac{a}{2} + ... + \frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{a}{2^n}$.

b. $B = \text{tg}a + 2\text{tg}2a + ... + 2^n\text{tg}2^n a$.

c. $C = \text{tg}a.\text{tg}2a + \text{tg}2a.\text{tg}3a + ... + \text{tg}(n-1)a.\text{tg}na$.

d. $D = 2 + \frac{\cos 2a}{\cos^2 a} + \frac{\cos 3a}{\cos^3 a} + ... + \frac{\cos na}{\cos^n a}$.

Bài toán 4: Chứng minh đẳng thức lượng giác độc lập với biến số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để thực hiện phép rút gọn biểu thức lượng giác.

Ví dụ 1: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A = \sin^2(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin^2 x + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3}).$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng công thức cộng:

$$A = (\sin x.\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}.\cos x)^2 + \sin^2 x + (\sin x.\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}.\cos x)^2$$

$$= (-\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)^2 + \sin^2 x + (-\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{3}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{3}{2}.$$

Cách 2: Sử dụng công thức nhân (hạ bậc):

$$A = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x - \frac{4\pi}{3})] + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}[1 - \cos(2x + \frac{4\pi}{3})]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}[\cos(2x - \frac{4\pi}{3}) + \cos(2x + \frac{4\pi}{3})] - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= \frac{3}{2} - \cos 2x.\cos\frac{4\pi}{3} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2: Tìm a sao cho biểu thức: $A = \cos 2x - a.\sin^2 x + 2\cos^2 x$ không phụ thuộc x.

Giải

Ta có: $A = (1 - 2\sin^2 x) - a.\sin^2 x + 2(1 - \sin^2 x) = (-4 - a)\sin^2 x + 3$

Vậy để A không phụ thuộc x điều kiện là:

$-a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = -4$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A = \cos^2(x - \frac{\pi}{3}) + \cos^2 x + \cos^2(x + \frac{\pi}{3}).$$

Bài tập 2: Xác định $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ để biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A = \cos x + \cos(x + a) + ... + \cos(x + 5a).$$

Bài tập 3: Tìm a, b sao cho các biểu thức sau không phụ thuộc x:

a. $A = a.\cos 4x + 4a.\cos 2x + b - \cos^4 x$.

b. $B = 2a.\sin x - a.\sin 3x + b\sin 5x - \sin^5 x$.

Bài tập 4: Tìm a, b sao cho các biểu thức sau không phụ thuộc x:

a. $A = a.\cos^2 x + b[\cos^2(x + \frac{\pi}{3}) + \cos^2(x - \frac{\pi}{3})] - \frac{3}{2}$.

b. $B = a(\cos x - 1) - \cos(ax + b^2) + b^2 + 1$.

Bài toán 5: Tính giá trị của biểu thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện phép biến đổi lượng giác để đơn giản biểu thức cần tính giá trị.

Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sin^2 73^0 + \sin^2 47^0 - \sin 73^0.\sin 47^0.$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{1}{2}(1 - \cos 146^0) + \frac{1}{2}(1 - \cos 94^0) - \frac{1}{2}(\cos 26^0 - \cos 120^0)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 146^0 + \cos 94^0) - \frac{1}{2}(\cos 26^0 + \frac{1}{2})$$

$$= \frac{3}{4} - \cos 120^0.\cos 26^0 - \frac{1}{2}\cos 26^0 = \frac{3}{4}$$

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sin^6\frac{\pi}{48} + \cos^6\frac{\pi}{48}.$$

Giải

Ta có:

$$A = (\sin^2\frac{\pi}{48} + \cos^2\frac{\pi}{48})^3 - 3\sin^2\frac{\pi}{48}.\cos^2\frac{\pi}{48}.(\sin^2\frac{\pi}{48} + \cos^2\frac{\pi}{48})$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2\frac{\pi}{24} = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos\frac{\pi}{12}) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos\frac{\pi}{12}. \quad (1)$$

Mặt khác, ta có:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$A = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}.\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{20 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{32}.$$

Ví dụ 3: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \mathrm{tg}^6\frac{\pi}{9} - 33\mathrm{tg}^4\frac{\pi}{9} + 27\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{9} - 3.$$

Giải

Ta có:

$$\mathrm{tg}3a = \frac{3\mathrm{tga} - \mathrm{tg}^3a}{1 - 3\mathrm{tg}^2a} \Rightarrow (\mathrm{tg}^3a - 3\mathrm{tga})^2 = (3\mathrm{tg}^2a - 1)^2.\mathrm{tg}^2 3a.$$

Với kết quả đó ta biến đổi A về dạng:

$$A = \left(\mathrm{tg}^3\frac{\pi}{9} - 3\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}\right)^2 - 3\left(3\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{9} - 1\right)^2$$

$$= \left(3\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{9} - 1\right)^2.\mathrm{tg}^2 3.\frac{\pi}{9} - 3\left(3\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{9} - 1\right)^2$$

$$= 3\left(3\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{9} - 1\right)^2 - 3\left(3\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{9} - 1\right)^2 = 0.$$

Ví dụ 4: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \cos\frac{\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}.$$

Giải

Nhân cả hai vế của biểu thức với $64\sin\frac{\pi}{65}$, ta được:

$$64A\sin\frac{\pi}{65} = 64\sin\frac{\pi}{65}.\cos\frac{\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$$

$$= 32\sin\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$$

$$= 16\sin\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$$

$$= 8\sin\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$$

$$= 4\sin\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65} = 2\sin\frac{32\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$$

$$= \sin\frac{64\pi}{65} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{65}\right) = \sin\frac{\pi}{65}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{64}.$$

Nhận xét: Như vậy trong ví dụ trên để tính giá trị của biểu thức chúng ta đã sử dụng nhân tử phụ $\sin\frac{\pi}{65}$ để tạo ra các công thức nhân đôi liên tiếp cho vế phải.

Ví dụ 5: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \cos\frac{\pi}{19} + \cos\frac{3\pi}{19} + \cos\frac{5\pi}{19} + \ldots + \cos\frac{17\pi}{19}.$$

Giải

Nhân hai vế với $2\sin\frac{\pi}{19}$, ta được:

$$2A\sin\frac{\pi}{19} = 2\sin\frac{\pi}{19}.\cos\frac{\pi}{19} + 2\sin\frac{\pi}{19}.\cos\frac{3\pi}{19} +$$

$$+ 2\sin\frac{\pi}{19}.\cos\frac{5\pi}{19} + \ldots + 2\sin\frac{\pi}{19}.\cos\frac{17\pi}{19}$$

$$= \sin\frac{2\pi}{19} + \sin\frac{4\pi}{19} - \sin\frac{2\pi}{19} +$$

$$+ \sin\frac{6\pi}{19} - \sin\frac{4\pi}{19} + \ldots + \sin\frac{18\pi}{19} - \sin\frac{16\pi}{19}$$

$$= \sin\frac{18\pi}{19} = \sin(\pi - \frac{\pi}{19}) = \sin\frac{\pi}{19}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Nhận xét:

1. Như vậy trong ví dụ trên để tính giá trị của biểu thức chúng ta đã sử dụng nhân tử phụ $\sin\frac{\pi}{19}$ để tạo ra các tích

$$\cos a.\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

tạo thuận lợi cho việc rút gọn VP.

Từ đó các em học sinh dễ nhận thấy rằng ý tưởng này cũng sẽ được áp dụng cho biểu thức bao gồm tổng các sin, bởi:

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)].$$

2. Chúng ta đã từng biết tới việc tính giá trị của biểu thức lượng giác bằng việc giải phương trình, ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ thêm ý tưởng này, chỉ có điều ở đây chúng ta sẽ sử dụng tính chất nghiệm của các phương trình đại số (định lý Viét cho các nghiệm của phương trình bậc 2, 3, 4 ...) để xác định giá trị, trong những trường hợp như vậy chúng ta thường thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn một phương trình nhận các giá trị trong biểu thức làm nghiệm.

Thí dụ với $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, π là nghiệm của phương trình:

$$5x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bước 2: Xây dựng phương trình đại số nhận các hàm số lượng giác chứa các cung làm nghiệm, từ đó thiết lập hệ thức Viét cho chúng.

Bước 3: Tính giá trị của biểu thức.

Ví dụ 6: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}} - 1.$$

Giải

Viết lại A dưới dạng:

$$A = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}} + \frac{1}{\cos\pi}.$$

Nhận xét rằng $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi$ là nghiệm của phương trình:

$$5x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}. \qquad (1)$$

Ta sẽ đi xây dựng phương trình đại số nhận $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$, $\cos\pi$ làm nghiệm bằng cách:

$$(1) \Leftrightarrow 3x = \pi - 2x + 2k\pi \Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi - 2x + 2k\pi)$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = -\cos 2x = -(2\cos^2 x - 1)$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0.$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\pi = -\frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}.\cos\pi + \cos\pi.\cos\frac{\pi}{5} = -\frac{3}{4} \\ \cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5}.\cos\pi = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy:

$$A = \frac{\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}.\cos\pi + \cos\pi.\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5}.\cos\pi} = -3.$$

Ví dụ 7: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = tg^2\frac{\pi}{18} + tg^2\frac{5\pi}{18} + tg^2\frac{7\pi}{18}$. b. $B = tg^4\frac{\pi}{18} + tg^4\frac{5\pi}{18} + tg^4\frac{7\pi}{18}$.

Giải

Nhận xét rằng $\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}$ là nghiệm của phương trình:

$$tg^2 3x = \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Ta sẽ đi xây dựng phương trình đại số nhận $tg^2\frac{\pi}{18}$, $tg^2\frac{5\pi}{18}$, $tg^2\frac{5\pi}{18}$ làm nghiệm bằng cách:

$$(1) <=> \left(\frac{3tgx - tg^3x}{1 - 3tg^2x}\right)^2 = \frac{1}{3} <=> 3tg^6x - 27tg^4x + 33tg^2x - 1 = 0$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} tg^2\frac{\pi}{18} + tg^2\frac{5\pi}{18} + tg^2\frac{7\pi}{18} = 9 \\ tg^2\frac{\pi}{18}.tg^2\frac{5\pi}{18} + tg^2\frac{5\pi}{18}.tg^2\frac{7\pi}{18} + tg^2\frac{7\pi}{18}.tg^2\frac{\pi}{18} = 11 \\ tg^2\frac{\pi}{18}.tg^2\frac{5\pi}{18}.tg^2\frac{7\pi}{18} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy: $A = 9$.

$$B = (tg^2\frac{\pi}{18} + tg^2\frac{5\pi}{18} + tg^2\frac{7\pi}{18})^2$$

$$- 2(tg^2\frac{\pi}{18}.tg^2\frac{5\pi}{18} + tg^2\frac{5\pi}{18}.tg^2\frac{7\pi}{18} + tg^2\frac{7\pi}{18}.tg^2\frac{\pi}{18})$$

$$= 9^2 - 2.11 = 59.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính giá trị của biểu thức: $A = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$ biết:

a. $\alpha = \frac{\pi}{24}$.

b. $\alpha = \frac{5\pi}{12}$.

Bài tập 2: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \sin\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$.

b. $B = \sin\frac{\pi}{24}.\sin\frac{5\pi}{24}.\sin\frac{7\pi}{24}.\sin\frac{11\pi}{24}$.

c. $C = \sin\frac{\pi}{30}.\sin\frac{7\pi}{30}.\sin\frac{13\pi}{30}.\sin\frac{19\pi}{30}.\sin\frac{25\pi}{30}$.

Bài tập 3: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}$.

b. $B = \sin10^0.\sin30^0.\sin50^0.\sin70^0$.

Bài tập 4: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = tg^2\frac{\pi}{12} + cotg^2\frac{\pi}{12}$.

b. $B = tg^2\frac{\pi}{24} + cotg^2\frac{\pi}{24}$.

Bài tập 5: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7} + \cos^2\frac{5\pi}{7}$.

b. $B = \cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{3\pi}{7} + \cos^4\frac{5\pi}{7}$.

c. $C = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}}$.

Bài tập 6: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \cos^4\frac{\pi}{14} + \cos^4\frac{3\pi}{14} + \cos^4\frac{5\pi}{14}$.

b. $B = \cos^6\frac{\pi}{14} + \cos^6\frac{3\pi}{14} + \cos^6\frac{5\pi}{14}$.

Bài tập 7: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}.$$

Bài tập 8: Biết:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} + \frac{1}{\mathrm{cotg}^2 x} = 6.$$

Tính giá trị của cos2x.

Bài tập 9: Biết:

$$\begin{cases} \cos a + \cos b = m \\ \sin a + \sin b = n \end{cases}, \text{ với } m, n \neq 0.$$

Tính giá trị của sin(a + b).

Bài toán 6: Chứng minh đẳng thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong các hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Dùng công thức lượng giác biến đổi một vế thành vế còn lại (VT => VP hoặc VP => VT). Khi đó:

- Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

Hướng 3: Biến đổi một đẳng thức đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Để ý rằng một biểu thức lượng giác có thể được biến đổi thành nhiều dạng khác nhau. Chẳng hạn ta có:

$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)$.

$\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$.

$\sin^2 2x = 4\sin^2 x.\cos^2 x$.

Tuỳ theo mỗi bài toán, ta lựa chọn công thức thích hợp để biến đổi.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\operatorname{cotg}x + \operatorname{tg}x = \frac{2}{\sin 2x}$. b. $\operatorname{cotg}x - \operatorname{cotg}2x = \frac{1}{\sin 2x}$.

Giải

a. Ta lựa chọn một trong hai cách

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi cho VT

$$VT = \operatorname{cotg}x + \operatorname{tg}x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi cho VP

$$VP = \frac{2}{\sin 2x} = \frac{2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{2\sin x.\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{cotg}x + \operatorname{tg}x.$$

b. Ta lựa chọn một trong hai cách

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi cho VT

$$\operatorname{cotg}x - \operatorname{cotg}2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{2\sin x.\cos x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1)}{2\sin x.\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}.$$

Cách 2: Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích

$$\operatorname{cotg}x - \operatorname{cotg}2x = \frac{\sin(2x - x)}{\sin x.\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}.$$

Ví dụ 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\cos 3x.\sin^3 x + \sin 3x.\cos^3 x = \frac{3}{4}\sin 4x$.

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$$A = \cos 172^\circ 30'.\sin^3 22^\circ 30' + \sin 172^\circ 30'.\cos^3 22^\circ 30'.$$

b. $\cos 3x.\cos^3 x + \sin 3x.\sin^3 x = \cos^3 2x$.

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$$B = \cos 172^\circ 30'.\cos^3 22^\circ 30' + \sin 172^\circ 30'.\sin^3 22^\circ 30'.$$

Giải

a. Ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Sử dụng phép hạ bậc đối xứng, ta có:

$$\begin{aligned}VT &= \sin^2x.\sin x.\cos3x + \cos^2x.\cos x.\sin3x\\ &= (1-\cos^2x).\sin x.\cos3x + (1-\sin^2x).\cos x.\sin3x\\ &= \sin x.\cos3x + \cos x.\sin3x - (\cos x.\cos3x + \sin x.\sin3x)\sin x.\cos x\\ &= \sin4x - \frac{1}{2}\cos2x.\sin2x = \sin4x - \frac{1}{4}\sin4x = \frac{3}{4}\sin4x.\end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng phép hạ bậc đơn, ta có:

$$\begin{aligned}VT &= \frac{1}{4}(3\sin x - \sin3x)\cos3x + \frac{1}{4}(3\cos x + \cos3x)\sin3x\\ &= \frac{3}{4}(\sin x.\cos3x + \cos x.\sin3x) = \frac{3}{4}\sin4x.\end{aligned}$$

Với kết quả trên áp dụng với $x = 22^0 30'$ ta được:

$$A = \frac{3}{4}\sin(4.22^0 30') = \frac{3}{4}\sin90^0 = \frac{3}{4}.$$

b. Tương tự.

Ví dụ 3: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin x.\sin(\frac{\pi}{3} - x).\sin(\frac{\pi}{3} + x) = \frac{1}{4}\sin3x.$

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sin\frac{\pi}{18}.\sin\frac{7\pi}{18}.\sin\frac{13\pi}{18}.$$

b. $\cos x.\cos(\frac{\pi}{3} - x).\cos(\frac{\pi}{3} + x) = \frac{1}{4}\cos3x.$

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$$B = \cos\frac{\pi}{18}.\cos\frac{7\pi}{18}.\cos\frac{13\pi}{18}.$$

c. $tgx.tg(\frac{\pi}{3} - x).tg(\frac{\pi}{3} + x) = tg3x.$

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$$C = tg\frac{\pi}{18}.tg\frac{7\pi}{18}.tg\frac{13\pi}{18}.$$

Giải

a. Ta có:

$$\begin{aligned}VT &= \sin x.\sin(\frac{\pi}{3} + x)\sin(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{2}(\cos2x - \cos\frac{2\pi}{3})\sin x\\ &= \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2x + \frac{1}{2})\sin x = \frac{1}{4}(3 - 4\sin^2x)\sin x\\ &= \frac{1}{4}(3\sin x - 4\sin^3x) = \frac{1}{4}\sin3x.\end{aligned}$$

Áp dụng:

$$A = \sin\frac{\pi}{18}.\sin\frac{7\pi}{18}.\sin\frac{13\pi}{18} = \frac{1}{4}\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{8}.$$

b. Đề nghị bạn đọc tự làm

c. Sử dụng kết quả câu a) và b).

Ví dụ 4: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c) = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$.

b. $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a + b + c) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}$.

Giải

a. Sử dụng phép biến đổi tổng thành tích, ta có:

$$VT = (\sin a + \sin b) - [\sin(a + b + c) - \sin c]$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} - 2\cos\frac{a+b+2c}{2}.\sin\frac{a+b}{2}$$

$$= -2\sin\frac{a+b}{2}.(\cos\frac{a+b+2c}{2} - \cos\frac{a-b}{2}) = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}.$$

b. Đề nghị bạn đọc tự làm.

Ví dụ 5: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sum\limits_{i=1}^{n}\sin(ia) = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$.

b. $\sum\limits_{i=1}^{n}\cos(ia) = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$.

Giải

a. Ta có:

$$VT = \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin na$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}.2\sin\frac{a}{2}.(\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin na)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}.(2\sin a.\sin\frac{a}{2} + 2\sin 2a.\sin\frac{a}{2} + \ldots + 2\sin na.\sin\frac{a}{2})$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}.\{(\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{3a}{2}) + (\cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{5a}{2}) + \ldots +$$

$$+ [\cos\frac{(2n-1)a}{2} - \cos\frac{(2n+1)a}{2}]\}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}.[\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{(2n+1)a}{2}] = \frac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

b. Đề nghị bạn đọc tự làm.

Chú ý: Dựa vào kết quả trong ví dụ trên chúng ta nhận được ngay đẳng thức:

$$\frac{\sin a + \sin 2a + ... + \sin na}{\cos a + \cos 2a + ... + \cos na} = \mathrm{tg}\frac{(n+1)a}{2}.$$

Ví dụ 6: Cho tgx, tgy là nghiệm của phương trình:

$$at^2 + bt + c = 0. \qquad (1)$$

Chứng minh rằng:

$$a.\sin^2(x + y) + b.\sin(x + y).\cos(x + y) + c.\cos^2(x + y) = c. \qquad (2)$$

Giải

Vì tgx, tgy là nghiệm của phương trình (1), ta được:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = -\frac{b}{a} \\ \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y = \frac{c}{a} \end{cases}. \qquad (I)$$

Biến đổi (2) về dạng:

$$[a.\sin(x + y) + b.\cos(x + y)]\sin(x + y) = c[1 - \cos^2(x + y)] = c.\sin^2(x + y)$$

$$\Leftrightarrow a.\sin(x + y) + b.\cos(x + y) = c.\sin(x + y)$$

$$\Leftrightarrow b.\cos(x + y) = (c - a).\sin(x + y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{c-a} = \mathrm{tg}(x + y) = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y} = \frac{-\frac{b}{a}}{1 - \frac{c}{a}} = \frac{b}{c-a}, \text{ luôn đúng.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\cos(x \pm n\pi) = (-1)^n\cos x$ với $n \in \mathbf{N}$.

b. $\sin(x \pm n\pi) = (-1)^n\sin x$ với $n \in \mathbf{N}$.

Bài tập 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\cos^2(x - y) - \cos^2(x + y) = \sin 2x.\sin 2y$.

b. $\cos^2(x - y) - \sin^2(x + y) = \cos 2x.\cos 2y$.

c. $2\cos x.\cos y.\cos(x + y) = \cos^2x + \cos^2y - \sin^2(x + y)$.

Bài tập 3: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin^3x.(1 + \mathrm{cotg}x) + \cos^3x.(1 + \mathrm{tg}x) = \sin x + \cos x$.

b. $\sin 3x - 2\sin^3 3x + \cos 2x.\sin x = \cos 5x.\sin 4x$.

$$^4x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}).$$

Bài tập 4: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3}) + \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3}) = 3\operatorname{tg}3x.$

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$$A = \operatorname{tg}1^0 + \operatorname{tg}5^0 + \operatorname{tg}9^0 + \ldots + \operatorname{tg}177^0.$$

b. $\operatorname{tg}^2(x - \frac{\pi}{3}) + \operatorname{tg}^2x + \operatorname{tg}^2(x + \frac{\pi}{3}) = 9\operatorname{tg}^2 3x + 6.$

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$$A = \operatorname{tg}^2 5^0 + \operatorname{tg}^2 10^0 + \operatorname{tg}^2 15^0 + \ldots + \operatorname{tg}^2 85^0.$$

c. $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z = \operatorname{tg}x.\operatorname{tg}y.\operatorname{tg}z + \frac{\sin(x + y + z)}{\cos x.\cos y.\cos z}.$

d. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x.\cos x} + \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{cotg}^3 x.$

Bài tập 5: Cho:

$$\sin x + \sin y = 2\sin(x + y), \text{ với } x + y \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Chứng minh rằng:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}.\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{1}{3}.$$

Bài tập 6: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $1 + \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos na = \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.\cos\frac{na}{2}.\sin\frac{(n+1)a}{2}.$

b. $\sin x + \sin(x + a) + \sin(x + 2a) + \ldots + \sin(x + na) =$

$$= \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.\sin(x + \frac{na}{2})\sin\frac{(n+1)a}{2}.$$

c. $\cos x + \cos(x + a) + \cos(x + 2a) + \ldots + \cos(x + na) =$

$$= \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.\cos(x + \frac{na}{2})\sin\frac{(n+1)a}{2}.$$

Bài toán 7: Chứng minh bất đẳng thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Muốn chứng minh một bất đẳng thức lượng giác, ta sử dụng các công cụ:

1. Các công thức lượng giác để biến đổi bất đẳng thức lượng giác.
2. Tính chất của các hàm số lượng giác.

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ và } -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$$

Mở rộng

$$|a.\sin x + b.\cos x| \le \sqrt{a^2 + b^2}.$$

3. Các bất đẳng thức đại số và tính chất tam thức bậc hai.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

$$\sin\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} > 1.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng mối liên hệ giữa các góc, ta biến đổi:

$$VT = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) + \sin\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1.$$

Cách 2: Sử dụng công thức cộng, ta biến đổi:

$$VT = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1.$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

$$\text{tg}^4x + \text{tg}^4 2x + \text{cotg}^4 3x \ge \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Giải

Để giảm độ phức tạp, ta đặt $a = \text{tg}x$, $b = \text{tg}2x$, $c = \text{cotg}3x$.

Ta có:

$$c = \text{cotg}3x = \text{cotg}(x + 2x) = \frac{1 - \text{tg}x.\text{tg}2x}{\text{tg}x + \text{tg}2x} = \frac{1 - ab}{a + b}$$

$$\Leftrightarrow (a + b)c = 1 - ab \Leftrightarrow ab + bc + ca = 1. \qquad (2)$$

Sử dụng (2), ta biến đổi tương đương (1) về dạng:

$$3(a^4 + b^4 + c^4) \ge 1 \Leftrightarrow 3(a^4 + b^4 + c^4) \ge (ab + bc + ca)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (a^2 - bc)^2 + (b^2 - ac)^2 + (c^2 - ab)^2 \ge 0$$

Dấu ' = ' xảy ra khi và chỉ khi:

$a = b = c \Leftrightarrow \text{tg}x = \text{tg}2x = \text{cotg}3x$ vô nghiệm.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng:

$$|\sin\alpha|.\sin x + |\cos\alpha|.\cos x \le 1.$$

Giải

Đặt $|\sin\alpha| = \sin\beta$ với $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$, khi đó: $|\cos\alpha| = \cos\beta$,

ta được:

$$|\sin\alpha|.\sin x + |\cos\alpha|.\cos x = \sin\beta.\sin x + \cos\alpha\beta.\cos x = \cos(x - \beta) \le 1.$$

Dấu ' = ' xảy ra khi và chỉ khi:

$$x = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} |\sin\alpha| = \sin x \\ |\cos\alpha| = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow x = \alpha.$$

Nhận xét: Như vậy, trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng tính chất $|\cos x| \le 1$, điều này hiển nhiên có thể mở rộng:

$$\sin x_1 + \ldots + \sin x_n \le n.$$

Ví dụ 4: Cho $0 \le x + y \le 2\pi$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}(\sin x + \sin y) \le \sin\frac{x+y}{2}.$$

Giải

Biến đổi vế trái, ta được: $\frac{1}{2}(\sin x + \sin y) = \sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$.

Theo giả thiết $0 \le x + y \le 2\pi$ suy ra

$$0 \le \frac{x+y}{2} \le \pi \Rightarrow \sin\frac{x+y}{2} \ge 0.$$

Mặt khác ta luôn có bất đẳng thức: $\cos\frac{x-y}{2} \le 1$,

do đó:

$$\frac{1}{2}(\sin x + \sin y) = \sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}, \text{ đpcm.}$$

Dấu ' = ' xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 0 \le x + y \le 2\pi \\ \cos\frac{x-y}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x + y \le 2\pi \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ x = y \end{cases}.$$

Ví dụ 5: Cho $\text{tg}\alpha = 3\text{tg}\beta$. Chứng minh rằng:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \le \text{tg}(\alpha - \beta) \le \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Giải

Ta có:

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta} = \frac{2\text{tg}\beta}{1 + 3\text{tg}^2\beta}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$|\mathrm{tg}(\alpha-\beta)| = \left|\frac{2\mathrm{tg}\beta}{1+3\mathrm{tg}^2\beta}\right| \le \frac{2|\mathrm{tg}\beta|}{2\sqrt{3\mathrm{tg}^2\beta}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \le \mathrm{tg}(\alpha-\beta) \le \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ dpcm.}$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi:

$$3\mathrm{tg}^2\beta = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } \mathrm{tg}\alpha = \sqrt{3} \\ \mathrm{tg}\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } \mathrm{tg}\alpha = -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ví dụ 6: Cho $0 < x_1 < x_2 < .. < x_n < \frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng:

$$\mathrm{tg}x_1 < \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + ... + \sin x_n}{\cos x_1 + \cos x_2 + ... + \cos x_n} < \mathrm{tg}x_n.$$

Giải

Hàm số sinx tăng trong khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$, do đó từ giả thiết ta được:

$$0 < \sin x_1 < \sin x_2 < .. < \sin x_n < 1$$

$$\Rightarrow 0 < n.\sin x_1 < \sin x_1 + \sin x_2 + .. + \sin x_n < n.\sin x_n \qquad (1)$$

Hàm số cosx giảm trong khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$, do đó từ giả thiết ta được:

$$1 > \cos x_1 > \cos x_2 > .. > \cos x_n > 0$$

$$\Rightarrow n.\cos x_1 > \cos x_1 + \cos x_2 + .. + \cos x_n > n.\cos x_n > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n.\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_1 + \cos x_2 + ... + \cos x_n} < \frac{1}{n.\cos x_n}. \qquad (2)$$

Nhân theo vế (1) và (2), ta được:

$$\mathrm{tg}x_1 < \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + ... + \sin x_n}{\cos x_1 + \cos x_2 + ... + \cos x_n} < \mathrm{tg}x_n.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho $0 \le x \le y \le \frac{\pi}{2}$ và $x + y = \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$x.\sin x + y.\sin y \ge \frac{\pi}{4}(\sin x + \sin y).$$

Bài tập 2: Chứng minh rằng:

a. $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$, với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b. $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$, với mọi x.

Bài tập 3: (Đề 113) Chứng minh rằng với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì: $2^{2\sin x} + 2^{\text{tg}x} > 2^{\frac{3x}{2}+1}$.

Bài tập 4: Cho $0 \le x, y, z \le \pi$, chứng minh rằng:

$$\sin x + \sin y + \sin z \le 3\sin\frac{x+y+z}{3}.$$

Bài tập 5: Cho x, y, z > 0 và thoả mãn $x + y + z < \frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng:

$$\text{tg}x.\text{tg}y + \text{tg}y.\text{tg}z + \text{tg}z.\text{tg}x < 1.$$

Bài tập 6: Cho x, y, z > 0 và thoả mãn $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng:

$$\sin^2x + \sin^2y + \sin^2z + 3\sin x.\sin y.\sin z \le \frac{9}{8}.$$

Bài tập 7: Cho $2\cos^2x - 3\cos x - 3 > 0$, chứng minh rằng $\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) < 0$.

Bài tập 8: Chứng minh rằng với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ luôn có:

$$\text{tg}^7x + \text{cotg}^7x \ge \text{tg}x + \text{cotg}x.$$

Bài toán 8: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức (hàm số) lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng:

1. Tính bị chặn của các hàm số lượng giác cơ bản:

$$|\sin x| \le 1 \text{ và } 0 \le \sin^{2n}x \le 1, \text{ với n nguyên dương.}$$
$$|\cos x| \le 1 \text{ và } 0 \le \cos^{2n}x \le 1, \text{ với n nguyên dương.}$$

2. Tính chất của tam thức bậc hai:

$$ax^2 + bx + c \le -\frac{\Delta}{4a}, \text{ với } a < 0.$$

$$ax^2 + bx + c \ge -\frac{\Delta}{4a}, \text{ với } a > 0.$$

3. Bất đẳng thức đại số.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = 2\sin x + 4$.

Giải

Ta có $|\sin x| \le 1$, do đó:

- $y_{\text{Max}} = 2.1 + 4 = 6$, đạt được khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- $y_{\text{Min}} = 2.(-1) + 4 = 2$, đạt được khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Nhận xét:

1. Như vậy, để xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên chúng ta đã sử dụng tính bị chặn của hàm số sinx, từ đó có thể tổng quát hoá cho dạng hàm số:

$y = a.\sin x + b$, với $a \neq 0$.

a. Với $a > 0$, ta được:

- $y_{Max} = a.1 + b = a + b$, đạt được khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- $y_{Min} = a.(-1) + b = b - a$, đạt được khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. Với $a < 0$ thì ngược lại – *Bạn đọc tự suy luận.*

Tương tự cho lớp hàm số $y = a.\cos x + b$, với $a \neq 0$.

2. Trong trường hợp góc x bị hạn chế, chúng ta cần thực hiện việc xác định miền giá trị cho hàm số sinx, thí dụ nếu trong ví dụ trên ta thêm điều kiện $-\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{3\pi}{4}$, ta có:

Từ $-\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$, do đó:

- $y_{Max} = 2.1 + 4 = 6$, đạt được khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.
- $y_{Min} = 2.(-\frac{1}{2}) + 4 = 3$, đạt được khi $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 1 - 2\cos x - 2\sin^2 x.$$

Giải

Biến đổi hàm số về dạng: $y = 2\cos^2 x - 2\cos x - 1$.

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \leq 1$, ta được: $y = 2t^2 - 2t - 1$.

Hoành độ đỉnh của Parabol $t_0 = \frac{1}{2} \in [-1, 1]$.

Vậy:

- $y_{Min} = y(t_0) = y(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$ đạt được khi $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- $y_{Max} = \max\{y(-1), y(1)\} = 3$ đạt được khi $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = a\sin x + b\cos x.$$

Giải

Ta đi tìm y để phương trình

$$a.\sin x + b.\cos x = y \tag{1}$$

có nghiệm x.

Chia hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

Vì $(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})^2 = 1$ nên tồn tại góc β sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta.$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$\sin x.\cos\beta + \sin\beta.\cos x = \frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\beta) = \frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm khi: $\left|\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{a^2+b^2} \le y \le \sqrt{a^2+b^2}$.

Từ đó $y_{Max} = \sqrt{a^2+b^2}$ và $y_{Min} = -\sqrt{a^2+b^2}$.

Nhận xét:

1. Kết quả trên được sử dụng với phương trình:

$$a.\sin x + b.\cos x = c$$

có nghiệm khi và chỉ khi:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le c \le \sqrt{a^2+b^2}.$$

2. Mở rộng tự nhiên cho giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = a\sin x + b\cos x + c$$

ta được:

- $y_{Max} = \sqrt{a^2+b^2} + c$,
- $y_{Min} = -\sqrt{a^2+b^2} + c$.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 3}{2\sin x + \cos x + 3}$.

Giải

Ta đi tìm y để phương trình

$$\frac{\sin x + 2\cos x + 3}{2\sin x + \cos x + 3} = y \qquad (1)$$

có nghiệm x.

Biến đổi (1) về dạng:

$$(2y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 3 - 3y_0. \qquad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm khi: $(3-3y)^2 \le (2y-1)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le y \le 2$.

Từ đó:

- $y_{Max} = 2$ đạt được khi $3\sin x = -3 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $y_{Min} = \frac{1}{2}$ đạt được khi $-\frac{3}{2}\cos x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 2(1 + \sin 2x.\cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x).$$

Giải

Biến đổi S về dạng:

$$y = 2(1 + \sin 2x.\cos 4x) - \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^2 4x + 1)$$
$$= \cos^2 4x + 2\sin 2x.\cos 4x + \sin^2 2x + 1 = (\cos 4x + \sin 2x)^2 + 1$$
$$= (2\sin^2 2x - \sin 2x - 1)^2 + 1.$$

Từ đó:

- $y_{Min} = 1$, đạt được khi: $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

- $y_{Max} = 4 + 1 = 5$, đạt được khi:

$$\sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 6: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin^{10}x + \cos^{10}x.$$

Giải

Ta đưa hàm số về dạng:

$$y = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^5 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}(1 + 10\cos^2 2x + 5\cos^4 2x)$$

$$= \frac{1}{16}[5(\cos^2 2x + 1)^2 - 4].$$

Từ trên, ta có: $y \le \frac{1}{16}[5(1 + 1)^2 - 4] = 1$,

suy ra $y_{Max} = 1$ đạt được khi $\cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$y \ge \frac{1}{16}[5(0 + 1)^2 - 4] = \frac{1}{16},$$

suy ra $y_{Min} = \frac{1}{16}$ đạt được khi $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

Chú ý: Nếu bài toán chỉ yêu cầu tìm giá trị lớn nhất của hàm số, ta có thể sử dụng nhận xét sau cho dạng tổng quát:

$y = \sin^{2n}x + \cos^{2n}x$, n nguyên dương lớn hơn 1.

Ta có:

$$\begin{cases} \sin^{2n} x \le \sin^2 x \\ \cos^{2n} x \le \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \sin^{2n}x + \cos^{2n}x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Vậy $y_{Max} = 1$ đạt được khi

$$\begin{cases}\sin^{2n} x = \sin^2 x\\ \cos^{2n} x = \cos^2 x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 0 <> x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Ví dụ 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{1}{|\sin x|} + \frac{1}{|\cos x|}.$$

Giải

Ta có: $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \geq 2.\frac{1}{|\sin x|}.\frac{1}{|\cos x|} = \frac{4}{|\sin 2x|} \geq 4.$

Từ đó suy ra:

$$\left(\frac{1}{|\sin x|} + \frac{1}{|\cos x|}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + 2.\frac{1}{|\sin x|}.\frac{1}{|\cos x|} \geq 4 + 2.2 = 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\sin x|} + \frac{1}{|\cos x|} \geq 2\sqrt{2},$$

do đó $y_{Min} = 2\sqrt{2}$ đạt được khi: $|\sin x| = |\cos x| \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

Ví dụ 8: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \cos x + \cos y - \cos(x + y).$$

Giải

Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$P = \cos x + \cos y - \cos(x + y) = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} - (2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1)$$

$$= -2(\cos^2\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{x-y}{2}) + \frac{1}{2}\cos^2\frac{x-y}{2} + 1$$

$$= -2(\cos\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2})^2 + \frac{1}{2}\cos^2\frac{x-y}{2} + 1.$$

Từ đó, vì:

$$0 \leq (\cos\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2})^2 \leq (1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \text{ và } 0 \leq \cos^2\frac{x-y}{2} \leq 1,$$

ta được $-3 \leq y \leq \frac{3}{2}$.

Như vậy:

- $y_{Max} = \frac{3}{2}$ đạt được khi:

$$\begin{cases}\cos\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 0\\ \cos^2\frac{x-y}{2} = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = y\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

- $y_{Min} = -3$ đạt được khi: $\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x+y}{2} = 1 \ \& \ \cos\frac{x-y}{2} = -1\\ \cos\frac{x+y}{2} = -1 \ \& \ \cos\frac{x-y}{2} = 1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 4k\pi \\ x - y = 2\pi + 4l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 2\pi + 4k\pi \\ x - y = 4l\pi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pi + 2(k + l)\pi \\ y = -\pi + 2(k - l)\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pi + 2(k + l)\pi \\ y = \pi + 2(k - l)\pi \end{cases} \end{array}\right., k, l \in \mathbf{Z}.$$

Ví dụ 9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{1 - \sin x \sin y}, \text{ trong đó } 0 \le x, y \le \frac{\pi}{2}, xy \ne \frac{\pi}{4}.$$

Giải

Ta có $\sin x.\sin y \le 1$, và:

$$(\sin^2 x - 1)(\sin^2 y - 1) \ge 0 \Leftrightarrow \sin^2 x \sin^2 y + 1 \ge \sin^2 x + \sin^2 y$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x \sin^2 y - 2\sin x.\sin y + 1 \ge \sin^2 x - 2\sin x.\sin y + \sin^2 y$$

$$\Leftrightarrow (\sin x.\sin y - 1)^2 \ge (\sin x - \sin y)^2$$

Vậy: $\left(\frac{\sin x - \sin y}{1 - \sin x \sin y}\right)^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{\sin x - \sin y}{1 - \sin x \sin y} \le 1$

Từ trên, ta có:

- $f_{Max} = 1$ đạt được khi $x = \frac{\pi}{2}$ và $0 \le y < \frac{\pi}{2}$.
- $f_{Min} = -1$ đạt được khi $y = \frac{\pi}{2}$ và $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 10: Cho x, y là hai góc nhọn sao cho tgx = 3tgy, tìm giá trị lớn nhất của:

$$z = x - y.$$

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x, y \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \text{tg}y = \text{tg}x \end{cases} \Rightarrow \text{tg}y > \text{tg}x \Rightarrow y > x \Rightarrow 0 < y - x < \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

$$\text{Ta có: } \text{tg}(y - x) = \frac{\text{tg}y - \text{tg}x}{1 - \text{tg}y.\text{tg}x} = \frac{2\text{tg}x}{1 - \text{tg}y.\text{tg}x}. \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $1 + 3\text{tg}^2x \ge 2\sqrt{3\text{tg}^2x} = 2\sqrt{3}\,\text{tg}x.$ (3)

Thay (3) vào (2), ta được: $\text{tg}(y - x) \le \frac{2\text{tg}x}{2\sqrt{3}\text{tg}x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg}\frac{\pi}{6} \Rightarrow y - x \le \frac{\pi}{6}.$

Vậy $z_{Max} = \frac{\pi}{6}$, đạt được khi: $\begin{cases} \text{tg}x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{tg}y = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{\pi}{3} \end{cases}.$

Ví dụ 11: Cho $\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}$, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$S = \text{tg}^2x + \text{tg}^2y.$$

Giải

Gọi s là một giá trị bất kỳ của S, ta đi tìm s để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} tg^2x + tg^2y = s \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 + \dfrac{1}{\cos^2 y} - 1 = s \\ 1 - \cos^2 x + 1 - \cos^2 y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 y} = s + 2 \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 3/2 \\ \cos^2 x . \cos^2 y = \dfrac{3}{2(s+2)} \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

$\Leftrightarrow$ $\cos^2x$, $\cos^2y$ là nghiệm của phương trình:

$$f(t) = t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{2(s+2)} = 0. \qquad (1)$$

Vậy, điều kiện là phương trình (1) có nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $0 \le t_1 \le t_2 \le 1$, tức là:

$$\begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ af(0) \ge 0 \\ af(1) \ge 0 \\ 0 \le S/2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le y \le 1.$$

Vậy $S_{Max} = 1$ và $S_{Min} = \dfrac{2}{3}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y = \sin x - 1$.

b. $y = 3\cos 2x + 2$.

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y = -2\sin x + 4$, với $\dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{7\pi}{6}$.

b. $y = 4\cos 2x - 1$, với $\dfrac{\pi}{12} \le x < \dfrac{5\pi}{8}$.

Bài tập 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $y = 3\sqrt{1 + \cos x} + 2$.

b. $y = 2 + 2\sin x + \cos^2 x$.

c. $y = \sin^2 x + 2\sin x + 5$.

d. $y = -\dfrac{1}{2}\sin^2 x + \dfrac{a}{2}\sin x + 1$.

e. $y = \sin x - \cos^2 x + \dfrac{1}{2}$.

Bài tập 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. (HVCNBCVT/Đề 1 – 1999): $y = 2\sin^2 x + 4\sin x.\cos x + \sqrt{5}$.

b. $y = a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c.\cos^2 x$.

c. $y = a.\cos^4 x + b.\sin^4 x$ với $0 < a \le b$.

Bài tập 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y = \dfrac{3\sin x}{2 + \cos x}$.

b. (ĐHSP QN – 1999): $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ với $x \in [0, \pi]$.

c. (ĐHGT/Đề 2 – 1997): $y = 1 + \dfrac{3\sin x}{2 + \cos x}$.

d. $y = \dfrac{2 + \cos x}{\sin x + \cos ix - 2}$.

e. $y = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ với $-\pi < x < \pi$.

f. (ĐHKT Hà Nội – 1998) : $A = \dfrac{2\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$.

Bài tập 6: (ĐHGT – 1998): Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = \sin\frac{2x}{1 + x^2} + \cos\frac{4x}{1 + x^2} + 1.$$

Bài tập 7: (Đề 96): Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}.$$

Bài tập 8: Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số:

a. $y = \sin x + 3\sin 2x$.

b. $y = \sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{1 + 2\sin x}$.

c. $y = \cos 3x + 2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

d. (ĐHCSND – 2001): $y = 5\cos x - \cos 5x$ trên đoạn $[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}]$.

Bài tập 9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y = |1 - 2\cos x| + |1 - 2\sin x|$.

b. $y = |1 + 2\cos x| + |1 + 2\sin x|$.

Bài tập 10: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. (ĐHL – 1999): $y = \sin^{20}x + \cos^{20}x$.

b. (ĐHD – 2001): $y = 2(1 + \sin 2x.\cos 4x) - \dfrac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$.

c. (ĐHSP I – 2001): $y = \dfrac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 4\cos^2 x}$.

Bài tập 11: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số :

$$y = \frac{\cos x}{2 + \sin x} \text{ với } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Bài tập 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a. (HVNH – 1998): $y = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

b. (HVCNBCVT – 1999): $y = 2\sin^2 x + 4\sin x.\cos x + \sqrt{5}$.

c. (ĐHKTQD – 1999): $y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x$ trên khoảng $(0, +\infty)$.

Bài tập 13: Tìm K để giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{K\sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn -1.

Bài tập 14: Cho hàm số:

$$y = \frac{2k\sin x + k}{\cos x + \sin x + 2}$$

a. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số với $k = 1$.

b. Xác định k sao cho giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 15: (ĐHQG – 1996): Cho hàm số :

$$y = \frac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}.$$

a. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số với $k = 1$.

b. Xác định k sao cho giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 16: Cho hàm số:

$$y = \frac{a\cos 3x - \sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}.$$

a. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

b. Xác định a để giá trị lớn nhất của hàm số nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Bài tập 17: Với $a \geq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{a + \cos x} + \sqrt{a + \sin x}.$$

Bài tập 18: (ĐHQGTPHCM/Đợt I – 1999): Cho hàm số:

$$f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m.$$

Tính theo m giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của f(x). Từ đó tìm m sao cho $f^2(x) \leq 36\ \forall x$.

CHỦ ĐỀ 4

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho ΔABC, với các góc A, B, C, tương ứng:

- Các cạnh là a, b, c.
- Các đường trung tuyến m_a, m_b, m_c.
- Các đường cao h_a, h_b, h_c.
- Các đường phân giác l_a, l_b, l_c.

Ta có các hệ thức sau:

1. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ COSIN

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

2. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ SIN

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

3. ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN

- $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$,
- $c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$,
- $a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$.

4. ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Phân giác trong	*Phân giác ngoài*
$l_A = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$,	$l'_A = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{\lvert b-c\rvert}$,
$l_B = \frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c}$,	$l'_B = \frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{\lvert a-c\rvert}$,
$l_C = \frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.	$l'_C = \frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{\lvert a-b\rvert}$.

5. ĐỊNH LÝ HÌNH CHIẾU

- $a = b.\cos C + c.\cos B$
- $b = c.\cos A + a.\cos C$.
- $c = a.\cos B + b.\cos A$.

6. CÔNG THỨC VỀ DIỆN TÍCH

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$.
- $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr = p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = p(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = p(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$

  với p là nửa chu vi, r là bán kính đường tròn nội tiếp.
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

7. CÔNG THỨC BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C},$$

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

8. CÔNG THỨC BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

$$r = \frac{S}{p},$$

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức lượng giác trong tam giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Muốn chứng minh một đẳng thức lượng giác trong tam giác ngoài việc vận dụng thành thạo các phép biến đổi lượng giác chúng ta còn cần phải nhớ các hệ thức cơ bản cho ΔABC bao gồm:

1. Định lý hàm số cosin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

2. Định lý hàm số sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

3. Định lý hình chiếu

$$a = b.\cos C + c.\cos B.$$
$$b = c.\cos A + a.\cos C.$$
$$c = a.\cos B + b.\cos A.$$

Trong bài toán này ta thường chia thành ba dạng nhỏ, bao gồm:

Dạng 1: Chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ giữa các góc.

Với dạng toán này chúng ta cần đặc biệt lưu ý tới:

- $A + B + C = \pi \Rightarrow A + B = \pi - C$ và $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ do đó:

  $$\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C,$$
  $$\sin\frac{A+B}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}, \ldots$$

- Với các đẳng thức lượng giác chứa một hàm số lượng giác của ba góc (sin hoặc cos) ta thường chỉ biến đổi hai nhân tử còn nhân tử thứ ba sẽ được xác định qua một vài phép biến đổi sau đó, và thường không sử dụng phép biến đổi tích thành tổng hoặc tổng thành tích khi có mặt cả ba góc A, B, C.
- Với các đẳng thức lượng giác chứa một hàm số lượng giác của ba góc (tg hoặc cotg) ta thường sử dụng phép biến đổi tương đương để đưa đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức luôn đúng hoặc ngược lại (xuất phát từ một đẳng thức luôn đúng).

Dạng 2: Chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ giữa góc và cạnh.

Với dạng toán này chúng ta thường sử dụng định lý hàm số sin và định lý hàm số cos.

Dạng 3: Chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ tới nhiều yếu tố trong tam giác.

Với dạng toán này chúng ta cần nhớ lại các kết quả của:

- Định lý đường trung tuyến, ví dụ:

  $$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}.$$

- Định lý đường phân giác, ví dụ:

  $$l_A = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

- Định lý về diện tích tam giác, ví dụ:

  $$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4R} = pr = p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}$$
  $$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Các công thức tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{abc}{4S} \text{ và } r = \frac{S}{p} = (p - a)\,\text{tg}\,\frac{A}{2}.$$

Chú ý: Có một phương pháp để chứng minh các đẳng thức lượng giác mà trong nhiều trường hợp tỏ ra rất hiệu quả là *phương pháp hình học*.

CÁC ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC

1. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.$
2. $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} + 1.$
3. $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C.$
4. $\text{cotg}A.\text{cotg}B + \text{cotg}B.\text{cotg}C + \text{cotg}C.\text{cotg}A = 1.$
5. $\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}.\text{tg}\frac{A}{2} = 1.$
6. $\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}.$

Ví dụ 1: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

Giải

Ta có:

$$VT = \cos A + \cos B + \cos C = (\cos A + \cos B) + \cos C$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \cos C = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right).\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \left(1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right) = 1 - 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$= 1 - 2\sin\frac{C}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right) - \cos\frac{A-B}{2}\right]$$

$$= 1 - 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right) = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

Hướng dẫn cách thực hiện:

Bước 1: Vì VT có cosA, cosB, cosC ta lựa chọn phép biến đổi tổng thành tích cho hai toán tử cosA, cosB còn cosC sẽ lựa chọn phép biến đổi sau.

Bước 2: Thông qua việc biến đổi:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$$

ta nhận thấy sự xuất hiện của $\sin\frac{C}{2}$, do đó lựa chọn phép biến đổi cho $\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$.

Bước 3: Tiếp theo ta có sự xuất hiện

$$\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}$$

Vì sự có mặt của cả ba góc A, B, C, do vậy ta cần tìm cách đưa về biến đổi hai góc bằng phép thay $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}$.

Chúng ta sẽ thực hiện thêm một ví dụ nữa để dễ hiểu hơn.

Ví dụ 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C.$$

Giải

Ta có:

$$VT = \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \sin^2C$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) + \sin^2C = 1 - \cos(A+B).\cos(A-B) + \sin^2C$$

$$= 1 - \cos(\pi - C).\cos(A-B) + \sin^2C = 1 + \cos C.\cos(A-B) + 1 - \cos^2C$$

$$= 2 + [\cos(A-B) - \cos C].\cos C = 2 + [\cos(A-B) + \cos(A+B)].\cos C$$

$$= 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C.$$

Nhận xét:

1. Như vậy vẫn với ý tưởng được trình bày sau ví dụ 1, ta thực hiện phép biến đổi cho $\sin^2A$ và $\sin^2B$, tuy nhiên không tồn tại phép biến đổi lượng giác cho hai toán tử bậc cao, do vậy ở đây ta đã sử dụng công thức hạ bậc để thực hiện.

2. Khi có sự xuất hiện của cosC ta lại lựa chọn phép biến đổi

$$\sin^2C = 1 - \cos^2C.$$

3. Cuối cùng với cos(A − B) − cosC, ta lựa chọn cosC = − cos(A + B).

4. Kết quả của ví dụ trên được sử dụng để xác định dạng của ΔABC khi so sánh tổng $S = \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C$ với 2, cụ thể:

- Nếu $S > 2 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C > 0 \Leftrightarrow \cos A, \cos B, \cos C > 0$
  $\Leftrightarrow$ ΔABC nhọn.
- Nếu $S = 2 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \vee \cos B = 0 \vee \cos C = 0$
  $\Leftrightarrow$ ΔABC vuông.
- Nếu $S < 2 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C < 0 \Leftrightarrow$ một trong ba cosA, cosB, cosC âm
  $\Leftrightarrow$ ΔABC tù.

5. Việc lựa chọn phương pháp hạ bậc cũng rất quan trọng, để minh hoạ ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\sin^3A.\cos(B - C) + \sin^3B.\cos(C - A) + \sin^3C.\cos(A - B) = 3\sin A.\sin B.\sin C.$$

Giải

Ta có:

$$\sin^3A.\cos(B - C) = \sin^2A.\sin A.\cos(B - C)$$

$$= \frac{1 - \cos 2A}{2}\sin(B + C).\cos(B - C) = \frac{1}{4}(1 - \cos2A)(\sin2B + \sin2C)$$

$$= \frac{1}{4}(\sin2B + \sin2C - \sin2B.\cos2A - \sin2C.\cos2A). \qquad (1)$$

Tương tự:

$$\sin^3B.\cos(C - A) = \frac{1}{4}(\sin2C + \sin2A - \sin2C.\cos2B - \sin2A.\cos2B). \ (2)$$

$$\sin^3C.\cos(A - B) = \frac{1}{4}(\sin2A + \sin2B - \sin2A.\cos2C - \sin2B.\cos2C). \ (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\sin^3A.\cos(B - C) + \sin^3B.\cos(C - A) + \sin^3C.\cos(A - B) =$$

$$= \frac{3}{4}(\sin2A + \sin2B + \sin2C) = 3\sin A.\sin B.\sin C, \text{ đpcm.}$$

Chú ý: Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng kết quả:

$\sin2A + \sin2B + \sin2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$ – *Đề nghị bạn đọc chứng minh.*

Ví dụ 4: Cho ΔABC không vuông, chứng minh rằng:

$$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C. \qquad (*)$$

Giải

Ta có:

$$A + B + C = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - C \Rightarrow \mathrm{tg}(A + B) = \mathrm{tg}(\pi - C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}{1 - \mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B} = -\mathrm{tg}C \Leftrightarrow \mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B = (1 - \mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B)\mathrm{tg}C$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C.$$

Nhận xét:

1. Như vậy xuất phát từ một đẳng thức luôn đúng $A + B + C = \pi$, ta đã chứng minh được (*).
2. Phương pháp chứng minh trên được sử dụng để chứng minh kết quả tổng quát:

$$\mathrm{tg}nA + \mathrm{tg}nB + \mathrm{tg}nC = \mathrm{tg}nA.\mathrm{tg}nB.\mathrm{tg}nC, \text{ với n nguyên dương.}$$

3. Thông qua bốn ví dụ trên chúng ta đã có được phương pháp luận cho dạng toán thứ nhất "*Chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ giữa các góc*". Các ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới dạng toán 2.

Ví dụ 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\frac{\cos A}{b.\cos C + c.\cos B} + \frac{\cos B}{c.\cos A + a.\cos C} + \frac{\cos C}{a.\cos B + b.\cos A} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$$

Giải

Sử dụng công thức hình chiếu, ta được:

$$VT = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{bc.\cos A + ac.\cos B + ab.\cos C}{abc}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 6: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $b.\cos B + c.\cos C = a.\cos(B - C)$.

b. $a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 2ab.\sin C$.

Giải

a. Ta có:

$$VT = b.\cos B + c.\cos C = \frac{a.\sin B}{\sin A}.\cos B + \frac{a.\sin C}{\sin A}.\cos C$$

$$= \frac{a}{2\sin A}(\sin 2B + \sin 2C) = \frac{a}{\sin A}.\sin(B + C).\cos(B - C)$$

$$= a.\cos(B - C), \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$VT = a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = a.a.\sin 2B + b.b.\sin 2A$$

$$= a.\frac{b.\sin A}{\sin B}.2\sin B.\cos B + b.\frac{a.\sin B}{\sin A}.2\sin A.\cos A$$

$$= 2ab(\sin A.\cos B + \sin B.\cos A) = 2ab.\sin(A + B) = 2ab.\sin C, \text{ đpcm.}$$

Chú ý:

1. Kết quả của câu b) được sử dụng để chứng minh:

$$S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A).$$

2. Khi cần sử dụng tới các biến đổi hữu tỉ, chúng ta cần nhớ phép biến đổi rất hiệu quả:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}.$$

Để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 7: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$R = \frac{p}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{a+b+c}{2(\sin A + \sin B + \sin C)}$$

$$= \frac{\frac{a+b+c}{2}}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} = \frac{p}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}.$$

Chú ý:

1. Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng kết quả:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$ – *Đề nghị bạn đọc chứng minh.*

2. Các ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới hệ thức lượng giác liên hệ tới nhiều yếu tố trong tam giác.

Ví dụ 8: Cho ΔABC, chứng minh rằng: $tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} = \frac{r+4R}{p}$.

Giải

Ta có:

$$VT = \frac{1}{2}(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}) + \frac{1}{2}(tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}) + \frac{1}{2}(tg\frac{C}{2} + tg\frac{A}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{C+A}{2}}{\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}}\right]$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} = \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{4 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{R\left(4 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)}{R(\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{r+4R}{p}.$$

Chú ý:

1. Trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng hai đẳng thức:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.$$

2. Chúng ta đều biết rằng diện tích tam giác được xác định bằng nhiều công thức khác nhau:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4R} = pr = p(p-a)tg\frac{A}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

do vậy có thể thấy được vai trò trung gian rất quan trọng của nó trong việc chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ tới nhiều yếu tố trong tam giác, để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 9: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = pr$$

suy ra:

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{S} = \frac{a+b+c}{2S}. \qquad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1) ta được điều cần chứng minh.

Ví dụ 10: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$l_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}. \qquad (1)$$

Giải

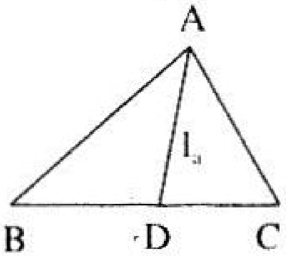
Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A, ta có:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}l_a c\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}l_a b\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow bc.\sin A = l_a(c+b)\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow l_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$



Chú ý:

1. Kết quả của ví dụ được áp dụng để thực hiện yêu cầu:

   "*Cho ΔABC vuông tại A, chứng minh rằng* $l_b.l_c = 4a^2.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$"

   Thật vậy, bằng cách chứng minh như trong ví dụ 10 ta được:

$$l_b = \frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c} \text{ và } l_c = \frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

suy ra:

$$l_b.l_c = \frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c}.\frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b} = 4a^2.\frac{\sin C.\cos\frac{B}{2}.\sin B.\cos\frac{C}{2}}{(\sin A+\sin C)(\sin A+\sin B)}$$

$$= 4a^2.\frac{\sin C.\cos\frac{B}{2}.\sin B.\cos\frac{C}{2}}{4\sin\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}.\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}$$

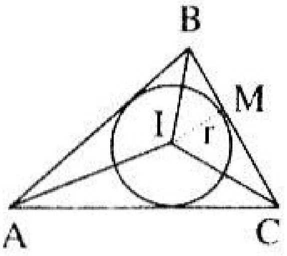
$$= 4a^2.\frac{4\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}{4co\frac{B}{2}.\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}).\cos\frac{C}{2}.\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2})}$$

$$= 4a^2.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\frac{\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}}{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2})+\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$= 4a^2.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\frac{\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{B-C}{2}} = 4a^2.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

2. Thông qua ví dụ chúng ta đã bước đầu tiếp cận với việc sử dụng phương pháp hình học để chứng minh đẳng thức lượng giác trong tam giác, ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ thêm việc sử dụng phương pháp này.

Ví dụ 11: Cho ΔABC, chứng minh rằng: $r = \frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$.



Giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Xét ΔIBC, ta có:

$$\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{BC}{\sin BIC} = \frac{a}{\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}} \Leftrightarrow IB = \frac{a.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}. \quad (1)$$

Mặt khác: $IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} \Leftrightarrow r = \frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$.

Cách 2: Giả sử đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với BC tại M, ta có:

$$a = BC = BM + MC = r.\text{cotg}\frac{B}{2} + r.\text{cotg}\frac{C}{2} = \frac{r.\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}} = \frac{r.\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Nhận xét:

1. Việc lựa chọn ví dụ trên với hai cách giải cùng sử dụng phương pháp hình học nhằm mục đích giúp các em học sinh nhận ra rằng việc *đặt vấn đề cho điểm xuất phát* sẽ giúp nhận được lời giải ngắn gọn và tường minh.
2. Kết quả trên được sử dụng để chứng minh

" *Trong ΔABC luôn có* $1 + \frac{r}{R} = cosA + cosB + cosC$"

Thật vậy, từ kết quả của ví dụ 11 ta có:

$$r = \frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{r}{a} = \frac{r}{2R.\sin A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{2\sin A.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{4\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}. \qquad (3)$$

Sử dụng kết quả: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

do đó (3) được chuyển thành:

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 12: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$(b - c).\text{cotg}\frac{A}{2} + (c - a).\text{cotg}\frac{B}{2} + (a - b).\text{cotg}\frac{C}{2} = 0. \qquad (1)$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác, ta có:

$$(b - c).\text{cotg}\frac{A}{2} = 2R(\sin B - \sin C).\text{cotg}\frac{A}{2} = 4R.\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}.\text{cotg}\frac{A}{2}$$

$$= 4R.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}.\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 4R.\sin\frac{B-C}{2}.\sin\frac{B+C}{2}$$

$$= 2R(\cos C - \cos B).$$

Tương tự:

$$(c - a).\text{cotg}\frac{B}{2} = 2R(\cos A - \cos C).$$

$$(a - b).\text{cotg}\frac{C}{2} = 2R(\cos B - \cos A).$$

Cộng theo vế ta nhận được đẳng thức cần chứng minh.

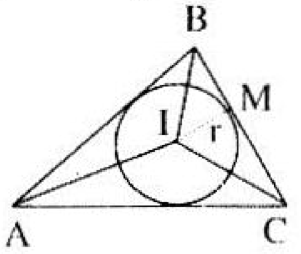
Cách 2: Sử dụng phương pháp hình học, ta có:

$$a = BC = BM + MC = r.\text{cotg}\frac{B}{2} + r.\text{cotg}\frac{C}{2} = r(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}). \quad (2)$$

Tương tự:

$$b = r(\text{cotg}\frac{C}{2} + \text{cotg}\frac{A}{2}). \quad (3)$$

$$c = r(\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2}). \quad (4)$$



Thay (2), (3), (4) vào VT của (1), ta được điều cần chứng minh.

Chú ý: Với các đẳng thức lượng giác có liên quan tới vị trí của điểm, chúng ta cần xác định được các trường hợp xảy ra, rồi thực hiện cho mỗi trường hợp riêng. Để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 13: Cho ΔABC có các góc B, C nhọn. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng:

$$\text{cotg}\widehat{AMB} = \frac{\sin(B - C)}{2\sin B.\sin C}.$$

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC, khi đó H có thể thuộc BM hoặc MC, do đó ta sẽ xét hai trường hợp:

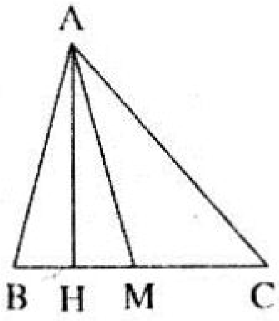
Trường hợp 1: Nếu H thuộc BM.

Ta có:

$$\text{cotg}\widehat{AMB} = \frac{MH}{AH} = \frac{2MH}{2AH} = \frac{(MH + MC) - (MB - HM)}{2AH}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{HC}{AH} - \frac{BH}{AH}) = \frac{1}{2}(\text{cotg}C - \text{cotg}B)$$

$$= \frac{\sin(B - C)}{2\sin B.\sin C}.$$



Trường hợp 2: Nếu H thuộc MC − *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Ví dụ 14: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}, \quad (1)$$

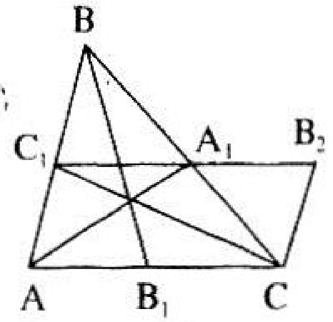
với $m = \frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c)$. (*)

Giải

Nhận xét rằng với (*) thì biểu thức $\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$ chính là công thức Hêrông cho tam giác có các cạnh là m_a, m_b, m_c, do vậy chúng ta sẽ chứng minh (1) theo hai bước:

Bước 1: Dựng tam giác có các cạnh là m_a, m_b, m_c và diện tích S_1.

Bước 2: Chứng minh $S = \frac{4}{3}S_1$.



Như vậy:

Với A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB, ta dựng hình bình hành ACB_2C_1, từ đó suy ra ΔBB_1B_2 có các cạnh là:

$$BB_1 = m_b,\ B_1B_2 = AA_1 = m_a,\ B_2B = CC_1 = m_c.$$

Ta có: $S = \frac{4}{3}S_{\Delta BB_1B_2} = \frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$.

b. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$.

c. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$.

Bài tập 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\text{cotg}A.\text{cotg}B + \text{cotg}B.\text{cotg}C + \text{cotg}C.\text{cotg}A = 1$.

b. $\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}.\text{tg}\frac{A}{2} = 1$.

c. $\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}$.

Bài tập 3: Cho ΔABC với n nguyên dương, chứng minh rằng:

a. $\sin(2nA) + \sin(2nB) + \sin(2nC) = 4(-1)^{n+1}\sin(nA).\sin(nB).\sin(nC)$.

b. $\cos(2nA) + \cos(2nB) + \cos(2nC) = 4(-1)^{n+1}\cos(nA).\cos(nB).\cos(nC) - 1$.

c. $\cos^2 nA + \cos^2 nB + \cos^2 nC = 2(-1)^n\cos(nA).\cos(nB).\cos(nC) + 1$.

d. $\text{tg}(nA) + \text{tg}(nB) + \text{tg}(nC) = \text{tg}(nA).\text{tg}(nB).\text{tg}(nC)$.

e. $\text{cotg}(nA).\text{cotg}(nB) + \text{cotg}(nB).\text{cotg}(nC) + \text{cotg}(nC).\text{cotg}(nA) = 1$.

Bài tập 4: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\frac{b+c}{a}.\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2}$.

b. $\frac{2(b+c)}{a}.\sin^2\frac{A}{2} = \cos B + \cos C$.

c. $(a^2 - b^2)\sin A.\sin B = ab.\sin(A - B).\sin C$.

d. $\dfrac{a.\sin A + b.\sin B + c.\sin C}{a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C} = \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C$.

Bài tập 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $p(p - a) = 4bc.\cos^2\dfrac{A}{2}$. b. $(p - b)(p - c) = bc.\sin^2\dfrac{A}{2}$.

Bài tập 6: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $a.\sin(B - C) + b.\sin(C - A) + c.\sin(A - B) = 0$.

b. $(b^2 - c^2)\text{cotg}A + (c^2 - a^2)\text{cotg}B + (a^2 - b^2)\text{cotg}C = 0$.

Bài tập 7: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $S = \dfrac{R}{2}(a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C)$. c. $S = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C)}$.

b. $S = \dfrac{1}{4}(a^2.\text{cotg}A + b^2.\text{cotg}B + c^2.\text{cotg}C)$. d. $S = (p - a)(p - b).\text{cotg}\dfrac{C}{2}$.

Bài tập 8: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $l_a = \dfrac{\sqrt{bc(a + b + c)(b + c - a)}}{b + c}$.

b. $(b + c)^2.l_a^2 = bc[b + c]^2 - a^2$.

c. $(b + c)^4 + (4h_a^2 + a^2) = 2(l_a^2 + a^2)(b + c)^2$.

d. $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right).l_c + \left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right).l_a + \left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\right).l_b = 2(\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2})$.

Bài tập 9: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C$.

b. $b^2\sin 2C + c^2\sin 2C = 2bc\sin(B + C)$.

Bài tập 10: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)R}{abc}$.

b. $(a - b)\text{cotg}\dfrac{C}{2} + (b - c)\text{cotg}\dfrac{A}{2} + (a - c)\text{cotg}\dfrac{B}{2} = 0$.

Bài tập 11: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $p = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ c. $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

b. $\dfrac{r}{p} = \text{tg}\dfrac{A}{2}\text{tg}\dfrac{B}{2}\text{tg}\dfrac{C}{2}$. d. $r = \dfrac{a.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}$.

Bài tập 12: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$ b. $c^2 = (a - b)^2 + 4S.\frac{1 - \cos C}{\sin C}$

Bài tập 13: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$. b. $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Bài tập 14: Cho ΔABC có trung tuyến $AM = \frac{c}{2}$. Chứng minh rằng:

a. $a^2 - c^2 = 2b^2$ b. $\sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C$

Bài tập 15: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. Nếu $a + c = 2b$ thì $\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$

b. Nếu $a + c = 2b$ thì $2(c - a) = 3r(\text{tg}\frac{C}{2} - \text{tg}\frac{A}{2})$

c. (ĐHTM – 2000): Nếu $a^2 + c^2 = 2b^2$ thì $2\text{cotg}B = \text{cotg}C + \text{cotg}A$

Bài tập 16: Cho ΔABC, có các cạnh thoả mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh rằng ΔABC nhọn và các góc thoả mãn:

$$2\sin^2 A = \text{tg}B.\text{tg}C.$$

Bài tập 17: Đường tròn nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{pr^2}{2R}.$$

Bài tập 18: Cho ΔABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và 3 cạnh BC = a, CA = b, AB = c.

a. Chứng minh rằng chu vi ΔA'B'C' bằng $a\cos A + b\cos B + c\cos C$.

b. Chứng minh rằng $R_{A'B'C'} = \frac{1}{2}R_{ABC}$.

Bài toán 2: Chứng minh bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh một bất đẳng thức lượng giác trong tam giác, ta có thể lựa chọn theo thứ tự các phương pháp sau:

Phương pháp 1: Dùng phép biến đổi tương đương.

Phương pháp 2: Dùng các bất đẳng thức cơ bản đã có sẵn, như:

1. Bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i > \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \quad \text{với } a_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Bất đẳng thức Bunhiacốpski:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Phương pháp 3: Dùng tam thức bậc hai.

Chú ý: Khi chứng minh một bất đẳng thức lượng giác trong tam giác cần chú ý tới các tính chất đặc trưng của các hàm lượng giác, như:

1. Tính bị chặn của hàm sinx, cosx.
2. Dấu các hàm lượng giác trong các cung phần tư.
3. Tính chất của các cung liên kết: cung đối, cung bù, cung phụ, cung sai khác π.
4. Tính chất: $|b - c| < a < b + c$ trong ΔABC.

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC

1. $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. $1 < \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.
3. $1 < \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$.
4. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
5. $\sin A.\sin B.\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.
6. $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$.
7. $\cos A.\cos B.\cos C \le \frac{1}{8}$.
8. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < \frac{9}{4}$.
9. $tgA + tgB + tgC \ge 3\sqrt{3}$, với ΔABC nhọn.
10. $cotgA + cotgB + cotgC \ge \sqrt{3}$, với ΔABC nhọn.
11. $tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$.
12. $cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2} > 3\sqrt{3}$.

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC

Bất đẳng thức 1: Cho ΔABC, chứng minh rằng: $\sin A + \sin B + \sin C < \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Chứng minh

Ta có:

$$VT + \sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin(\frac{C}{2} + \frac{\pi}{6}).\cos(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6})$$

$$\overset{0<\frac{A+B}{2},\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}<\pi}{\le} 2\sin\frac{A+B}{2} + 2\sin(\frac{C}{2} + \frac{\pi}{6})$$

$$= 4\sin(\frac{A+B+C}{4} + \frac{\pi}{12}).\cos(\frac{A+B-C}{4} - \frac{\pi}{12})$$

$$= 4\sin\frac{\pi}{3}.\cos(\frac{A+B-C}{4} - \frac{\pi}{12}) \le 4\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{A-B}{2} = 1 \\ \cos\left(\dfrac{C}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \cos\left(\dfrac{A+B-C}{4} - \dfrac{\pi}{12}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Bất đẳng thức 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng: $1 < \cos A + \cos B + \cos C < \frac{3}{2}$.

Chứng minh

a. Chứng minh vế trái, ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$$
$$= 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$= 1 + 2\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right).\sin\frac{C}{2}$$
$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} > 1.$$

Nhận xét: Nếu cho $A \to 0$, thì: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \to 1$ do vậy không thể thay số 1 bởi số lớn hơn trong bất đẳng thức trên.

b. Chứng minh vế phải, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng kết quả $xy \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, ta nhận được:

$$VT = \cos A + \cos B - \cos(A + B)$$
$$= (\cos A + \cos B).1 - \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$$
$$\le \frac{1}{2}[(\cos A + \cos B)^2 + 1] - \cos A.\cos B + \frac{1}{2}(\sin^2 A + \sin^2 B) = \frac{3}{2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos A + \cos B = 1 \\ \sin A = \sin B \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Cách 2: Sử dụng $a.\sin x + b.\cos x \le \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$VT = \cos A + \cos B - \cos(A + B) = \cos A + \cos B - \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$$
$$= [(1 - \cos B)\cos A + \sin B.\sin A] + \cos B$$
$$\le \sqrt{(1 - \cos B)^2 + \sin^2 B} + \cos B = \sqrt{2 - 2\cos B} + \cos B$$
$$= 2\sin\frac{B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{B}{2} = \frac{3}{2} - 2\left(\frac{1}{2} - \sin\frac{B}{2}\right)^2 \le \frac{3}{2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}(1-\cos B)\cos A+\sin B\sin A = 2\sin\frac{B}{2}\\ \sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\end{cases} <=> \begin{cases}B=\frac{\pi}{3}\\ \frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A = 2.\frac{1}{2}\end{cases}$$

$<=> A = B = C = \frac{\pi}{3} <=> \Delta ABC$ đều.

Cách 3: (*Sử dụng phép biến đổi*) Không mất tính tổng quát, ta giả sử C là góc nhỏ nhất trong ΔABC, suy ra $0 < C < \frac{\pi}{3}$, khi đó:

$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos\frac{\pi}{3} = (\cos A+\cos B)+\left(\cos C+\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}).\cos(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6})$$

$$< 2\cos\frac{A+B}{2} + 2\cos(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6})$$

$$= 4\cos(\frac{A+B+C}{4}+\frac{\pi}{12}).\cos(\frac{A+B-C}{4}-\frac{\pi}{12})$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{3}.\cos(\frac{A+B-C}{4}-\frac{\pi}{12}) < 4\cos\frac{\pi}{3}$$

$$<=> \cos A+\cos B+\cos C \le 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\cos\frac{A-B}{2}=1\\ \cos(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6})=1\\ \cos(\frac{A+B-C}{4}-\frac{\pi}{12})=1\end{cases} <=> A = B = C <=> \Delta ABC \text{ đều.}$$

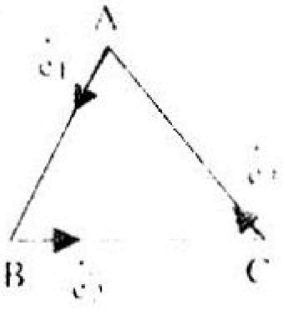
Cách 5: (*Sử dụng phép vectơ*) Lấy ba vectơ đơn vị $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ trên ba cạnh AB, BC, CA, ta có:

$(\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3})^2 > 0$

$<=> 1+1+1+2(\vec{e_1}.\vec{e_2}+\vec{e_2}.\vec{e_3}+\vec{e_3}.\vec{e_1}) > 0$

$<=> 3+2(-\cos B-\cos C-\cos A) > 0$

$<=> \cos A+\cos B+\cos C < \frac{3}{2}$.



Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đồng dạng với tam giác có các cạnh là các vectơ đơn vị <=> ΔABC đều.

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

1. $(1+a+b-ab)\cos C+(1+b+c-bc)\cos A+(1+c+a-ca)\cos B < 3$.

2. Cho ΔABC, các phân giác AA_1, BB_1 và CC_1 theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng:

$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}\leq\frac{9}{4}.$$

3. Cho ΔABC nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các ΔOBC, ΔOCA, ΔOAB. Chứng minh rằng:

$$R_1+R_2+R_3\geq 3R.$$

Bất đẳng thức 3: Cho ΔABC, chứng minh rằng: $1<\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq\frac{3}{2}$.

Chứng minh

a. Chứng minh vế trái, ta có:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\overset{0<\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2}<1}{\geq}\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

$$=\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

$$=\sqrt{2}\sin(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4})\overset{\frac{\pi}{4}<\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}}{>}\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=1.$$

b. Sử dụng kết quả $xy\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, ta nhận được:

$$VT=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}).1+\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\leq\frac{1}{2}[(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2})^2+1]+\frac{1}{2}(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2})\quad\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}=\frac{3}{2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}=1\\ \cos\frac{A}{2}=\cos\frac{B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow A=B=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \Delta ABC\text{ đều.}$$

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

1. Cho ΔABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Kéo dài AI, BI, CI theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng:

$$IA_2+IB_2+IC_2\geq IA+IB+IC.$$

2. Cho ΔABC nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các ΔOBC, ΔOCA, ΔOAB. Chứng minh rằng:

$$R_1+R_2+R_3\geq 3R.$$

Bất đẳng thức 4: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$2 < \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Chứng minh

a. Chứng minh vế trái, ta có $0 < \cos\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}, \cos\frac{C}{2} < 1$ nên:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos A + 1 + \cos B + 1 + \cos C)$$

$$= \frac{1}{2}(3 + \cos A + \cos B + \cos C) > \frac{4}{2} = 2$$

Nhận xét: Nếu cho $A \to 0$ và $B \to 0$ thì $C \to \pi$, khi đó:

$$\cos\frac{A}{2} \to 1, \cos\frac{B}{2} \to 1 \text{ và } \cos\frac{C}{2} \to 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \to 2$$

do vậy không thể thay số 2 bởi số lớn hơn trong bất đẳng thức trên.

b. Sử dụng kết quả $xy \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, ta nhận được:

$$VT = \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A+B}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\frac{B}{2}\right) +$$

$$+ \sqrt{3}\left[\sin\frac{A}{2}.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{B}{2}\right) + \sin\frac{B}{2}.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$< \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \cos^2\frac{A}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \cos^2\frac{B}{2}\right)\right] +$$

$$+ \sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2} + \frac{1}{3}\cos^2\frac{B}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{B}{2} + \frac{1}{3}\cos^2\frac{A}{2}\right)\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{B}{2} \\ \sin\frac{B}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

$$\frac{l_a + l_b}{c} + \frac{l_b + l_c}{a} + \frac{l_c + l_a}{b} \le 3\sqrt{3}.$$

Bất đẳng thức 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\sin A.\sin B.\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Chứng minh

Vì sinA, sinB, sinC > 0, nên sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\sin A.\sin B.\sin C \le \left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3 \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C ⇔ ΔABC đều.

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

1. $\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}$.

2. $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right) \ge (1+\frac{2}{\sqrt{3}})^3$.

Bất đẳng thức 6: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}.$$

Chứng minh

Vì $\sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2} > 0$, nên sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \left(\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3 \le \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C ⇔ ΔABC đều.

Bất đẳng thức 7: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\cos A.\cos B.\cos C \le \frac{1}{8}.$$

Chứng minh

- Nếu ΔABC tù, thì cosA.cosB.cosC < 0, do đó bất đẳng thức luôn đúng.
- Nếu ΔABC vuông hoặc nhọn, thì cosA, cosB, cosC ≥ 0, nên sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\cos A.\cos B.\cos C \le \left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3 \le \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C ⇔ ΔABC đều.

Bất đẳng thức 8: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Chứng minh

Vì $\cos\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}, \cos\frac{C}{2} > 0$, nên sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} \le \left(\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3 \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C ⇔ ΔABC đều.

Bất đẳng thức 9: Cho ΔABC, chứng minh rằng: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \le \frac{9}{4}$.

Chứng minh

Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$$4(\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C) \le 9$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2A + 2(1 - \cos2B) + 2(1 - \cos2C) \le 9$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2A - 4\cos(B + C).\cos(B - C) \le 5$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos^2A) + 4\cos A.\cos(B - C) \le 5$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2A - 4\cos A.\cos(B - C) + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow [2\cos A - \cos(B - C)]^2 + 1 - \cos^2(B - C) \ge 0, \text{ luôn đúng}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}2\cos A = \cos(B-C)\\ \cos^2(B-C) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\cos A = \cos(B-C)\\ \sin(B-C) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\cos A = 1\\ B = C\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

1. $m_a + m_b + m_c \le \frac{9R}{2}$.
2. $m_a.m_b.m_c \le \frac{27R^3}{8}$.
3. $\frac{1}{(m_a + m_b - m_c)^2} + \frac{1}{(m_a - m_b + m_c)^2} + \frac{1}{(m_a - m_b - m_c)^2} \ge \frac{4}{3R^2}$.

Bất đẳng thức 10: Cho ΔABC nhọn, chứng minh rằng:

$$tgA + tgB + tgC \ge 3\sqrt{3}. \qquad (1)$$

Chứng minh

Trước hết ta có:

$$tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC.$$

Vì ΔABC nhọn nên tgA, tgB, tgC > 0, do đó áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$tgA + tgB + tgC \ge 3\sqrt[3]{tgA.tgB.tgC} = 3\sqrt[3]{tgA + tgB + tgC}$$

$$\Leftrightarrow (tgA + tgB + tgC)^3 \ge 27(tgA + tgB + tgC)$$

$$\Leftrightarrow (tgA + tgB + tgC)^2 \geq 27 \Leftrightarrow tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

***Chú ý*:**

1. Vì $tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$ nên: $tgA.tgB.tgC \geq 3\sqrt{3}$ (2)

do đó: $(tgA.tgB.tgC)_{Min} = 3\sqrt{3}$.

2. Sử dụng (2) ta lại có: $tg^2A + tg^2B + tg^2C \geq 3\sqrt[3]{tg^2A.tg^2B.tg^2C} = 9$,

từ đó có thể tổng quát hoá

$$tg^nA + tg^nB + tg^nC \geq 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^n}.$$

Đặc biệt với n = 6, ta được:

$tg^6A + tg^6B + tg^6C \geq 81$ – *Đề thi ĐHTM – 1996.*

3. Nếu đặt:

$$\begin{cases} tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC = -p \\ tgA.tgB + tgB.tgC + tgC.tgA = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \leq -3\sqrt{3} \\ q \geq 9 \end{cases}.$$

Khi đó tgA, tgB, tgC là nghiệm của phương trình:

$t^3 + pt^2 + qt + p = 0$ – *Đề thi HSG PTTH Toàn quốc – 1998.*

4. Chúng ta có thể sử dụng các kết quả trên để chứng minh:

Với ΔABC nhọn, luôn có:

- $(tgA)^{tgA} + (tgB)^{tgB} + (tgC)^{tgC} \geq (\sqrt{3})^{3\sqrt{3}}$.
- $\dfrac{tg^5A + tg^5B + tg^5C}{tgA + tgB + tgC} \geq 9.$
- $\dfrac{tg^6A + tg^6B + tg^6C}{tgA + tgB + tgC} \geq 9\sqrt{3}$.

Bất đẳng thức 11: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Chứng minh

Trước hết ta có:

- $tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}.tg\frac{A}{2} = 1,$
- $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$, với mọi x, y, z.

Đề nghị bạn đọc tự chứng minh.

Ta có:

$$(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2})^2 \geq 3(tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}.tg\frac{A}{2}) = 3$$

$$\Leftrightarrow tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

1. $\text{tg}^2\frac{A}{2} + \text{tg}^2\frac{B}{2} + \text{tg}^2\frac{C}{2} \geq 1$.

   Từ đó có thể tổng quát: $\text{tg}^{2n}\frac{A}{2} + \text{tg}^{2n}\frac{B}{2} + \text{tg}^{2n}\frac{C}{2} > \frac{1}{3^{n-1}}$.

   Thật vậy:

$$(\text{tg}^2\frac{A}{2})^n + (\text{tg}^2\frac{B}{2})^n + (\text{tg}^2\frac{C}{2})^n \geq 3\left(\frac{\text{tg}^2\frac{A}{2} + \text{tg}^2\frac{B}{2} + \text{tg}^2\frac{C}{2}}{3}\right)^n > 3.\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

   Đặc biệt với n = 3, ta được:

   $\text{tg}^6\frac{A}{2} + \text{tg}^6\frac{B}{2} + \text{tg}^6\frac{C}{2} \geq \frac{1}{9}$ - *Đề thi ĐHGTVT – 1996.*

2. $a^2 + b^2 + c^2 \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 4S\sqrt{3}$.
3. $2(ab + bc + ca) \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 8S\sqrt{3}$.

Bất dẵng thức 12: Cho ΔABC, chứng minh rằng: $\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Chứng minh

Ta có:

$$1 = \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}.\text{tg}\frac{A}{2} \geq 3\sqrt[3]{\text{tg}^2\frac{A}{2}.\text{tg}^2\frac{B}{2}.\text{tg}^2\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C <=> ΔABC đều.

Chú ý:

1. Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh " Nếu ΔABC thoả mãn:

$$\text{tg}^2\frac{A}{2} + \text{tg}^2\frac{B}{2} + \text{tg}^2\frac{C}{2} - \text{tg}^2\frac{A}{2}.\text{tg}^2\frac{B}{2}.\text{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{26}{27}$$

thì ΔABC đều".

2. Đề nghị bạn đọc tự chứng minh các bất đẳng thức:
   a. $\text{cotgA} + \text{cotgB} + \text{cotgC} \geq \sqrt{3}$.
   b. $\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$.

Ví dụ 1: Cho ΔABC, chứng minh rằng: $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2$.

Giải

Ta có:

$$\cos A + \cos B > 0 \Rightarrow (\cos A + \cos B).\sin C < \cos A + \cos B. \qquad (1)$$

Tương tự ta cũng có:

$$(\cos B + \cos C).\sin A \le \cos B + \cos C. \qquad (2)$$

$$(\cos C + \cos A).\sin B \le \cos C + \cos A. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) với lưu ý rằng dấu " = " không thể xảy ra đồng thời tại (1), (2), (3), ta được:

$$\sin(A + B) + \sin(B + C) + \sin(C + A) < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \sin C + \sin A + \sin B < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$(1 + \frac{1}{\sin A})(1 + \frac{1}{\sin B})(1 + \frac{1}{\sin C}) > \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$VT = 1 + (\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}) +$$

$$+ (\frac{1}{\sin A.\sin B} + \frac{1}{\sin B.\sin C} + \frac{1}{\sin C.\sin A}) + \frac{1}{\sin A.\sin B.\sin C}$$

$$\overset{Cosi}{\ge} 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C}} + \frac{3}{(\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C})^2} + \frac{1}{(\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C})^3}$$

$$= (1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C}})^3 \ge \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Chú ý: Bạn đọc cần nhớ rằng trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng bất đẳng thức:

$$\sin A.\sin B.\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C}} \ge \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC nhọn, chứng minh rằng:

a. $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C \ge \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}$.

b. $\sqrt{\text{tg}A} + \sqrt{\text{tg}B} + \sqrt{\text{tg}C} \ge \sqrt{\text{cotg}\frac{A}{2}} + \sqrt{\text{cotg}\frac{B}{2}} + \sqrt{\text{cotg}\frac{C}{2}}$.

Giải

a. **Ta có:**

$$\text{tg}A + \text{tg}B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]}$$

$$\ge \frac{2\sin(A+B)}{\cos(A+B)+1} \ge 2\text{tg}\frac{A+B}{2} = 2\text{cotg}\frac{C}{2}.$$

Tương tự ta cũng có: $\text{tgB} + \text{tgC} \ge 2\text{cotg}\frac{A}{2}$, $\text{tgC} + \text{tgA} \ge 2\text{cotg}\frac{B}{2}$.

Suy ra: $\text{tgA} + \text{tgB} + \text{tgC} \ge \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

b. Sử dụng bất đẳng thức Côsi và $\text{tgA}.\text{tgB} \ge \text{cotg}^2\frac{C}{2}$, ta được:

$$\sqrt{\text{tgA}} + \sqrt{\text{tgB}} \ge 2\sqrt{\sqrt{\text{tgA}}.\sqrt{\text{tgB}}} \ge 2\sqrt{\text{cotg}\frac{C}{2}}.$$

Tương tự ta cũng có:

$$\sqrt{\text{tgB}} + \sqrt{\text{tgC}} \ge 2\sqrt{\text{cotg}\frac{A}{2}}, \qquad \sqrt{\text{tgC}} + \sqrt{\text{tgA}} \ge 2\sqrt{\text{cotg}\frac{B}{2}}.$$

Suy ra:

$$\sqrt{\text{tgA}} + \sqrt{\text{tgB}} + \sqrt{\text{tgC}} \ge \sqrt{\text{cotg}\frac{A}{2}} + \sqrt{\text{cotg}\frac{B}{2}} + \sqrt{\text{cotg}\frac{C}{2}}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Ví dụ 4: Cho ΔABC, biết $0 < A \le B \le C \le \frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng:

$$\frac{2\cos 3C - 4\cos 2C + 1}{\cos C} \ge 2. \qquad (1)$$

Giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{\pi}{6} \le C < \frac{\pi}{2}$, do đó nếu đặt $x = \cos C$ thì $0 < x \le \frac{1}{2}$.

Khi đó (1) được viết lại dưới dạng:

$$\frac{2(4\cos^3 C - 3\cos C) - 4(2\cos^2 C - 1) + 1}{\cos C} \ge 2$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 8x^2 - 8x + 5 \ge 0$$

$\Leftrightarrow (2x - 1)(4x^2 - 2x - 5) \ge 0$ luôn đúng với $0 < x \le \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng trong mọi ΔABC ta luôn có: $S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn

Ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Leftrightarrow S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \overset{\text{Côsi}}{\le} p.\left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3 = \frac{p^4}{27}$$

$$\Leftrightarrow S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Ví dụ 6: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$S = pr = \frac{abc}{4R}$$

$$\Rightarrow r = \frac{abc}{4Rp} = \frac{abc}{4R(a+b+c)} = \frac{2R.\sin A.2R.\sin B.2R.\sin C}{4R(2R.\sin A + 2R.\sin B + 2R.\sin C)}$$

$$= \frac{2R.\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \overset{\text{Côsi}}{\le} \frac{2R.\sin A.\sin B.\sin C}{3\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C}}$$

$$= \frac{2R.}{3}.(\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C})^2 \le \frac{2R.}{3}.\left(\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}\right)^2 = \frac{R.}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{R} \le \frac{1}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Ví dụ 7: (*Bất đẳng thức Hadvigher*): Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4S\sqrt{3} \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi tương đương (1) về dạng:

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \ge 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{2S}{\sin C} + \frac{2S}{\sin A} + \frac{2S}{\sin B}\right) - 4S(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C) \ge 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A} - \text{cotg}A\right) + \left(\frac{1}{\sin B} - \text{cotg}B\right) + \left(\frac{1}{\sin C} - \text{cotg}C\right) \ge \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{\sin A} + \frac{1 - \cos B}{\sin B} + \frac{1 - \cos C}{\sin C} \ge \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}} + \frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}} + \frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}} \ge \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}\text{, luôn đúng.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Chú ý: Bạn đọc cần nhớ rằng trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng các công thức biến đổi:

1. $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow bc = \frac{2S}{\sin A}, ac = \frac{2S}{\sin B}, ab = \frac{2S}{\sin C}$.

2. Theo định lý hàm số cotg, ta có $\cot gA + \cot gB + \cot gC = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

3. Bất đẳng thức cơ bản $tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$.

Ví dụ 8: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $m_a.m_b.m_c \le \frac{27R^3}{8}$.

b. $m_a + m_b + m_c \le \frac{9R}{2}$.

Giải

a. Ta có:

$$(m_a.m_b.m_c)^2 = m_a^2.m_b^2.m_c^2 \overset{\text{Côsi}}{\le} \left(\frac{m_a^2+m_b^2+m_b^2}{3}\right)^3 = \frac{1}{64}(a^2+b^2+c^2)^3$$

$$= \frac{1}{64}[(2R.\sin A)^2 + (2R.\sin B)^2 + (2R.\sin C)^2]^3$$

$$= R^6.(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)^3 \overset{\text{cơ bản}}{\le} R^6.\left(\frac{9}{4}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow m_a.m_b.m_c \le \frac{27R^3}{8}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

b. Ta có:

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \overset{\text{Bunhiacôpxki}}{\le} (1+1+1)(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{9}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$= 9R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \overset{\text{cơ bản}}{\le} 9R^2.\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow m_a + m_b + m_c \le \frac{9R}{2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Chú ý: Bạn đọc cần nhớ rằng trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng kết quả:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}.$$

Ví dụ 9: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $l_a \le m_a$.

b. $\frac{l_a+l_b}{c} + \frac{l_b+l_c}{a} + \frac{l_c+l_a}{b} \le 3\sqrt{3}$.

Giải

a. Ta có:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}.\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}.\sqrt{p(p-a)} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \frac{b+c}{b+c}.\sqrt{p(p-a)} = \sqrt{p(p-a)}. \quad (1)$$

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \geq \frac{1}{4}[(b+c)^2 - a^2] = \frac{1}{4}(b+c+a)(b+c-a) = p(p-a)$$

$$\Rightarrow m_a \geq \sqrt{p(p-a)}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $l_a \leq m_a$, dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

b. Viết lại VT của bất đẳng thức dưới dạng:

$$VT = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).l_c + \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).l_a + \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)l_b$$

$$= \frac{a+b}{ab}.\frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b} + \frac{b+c}{bc}.\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} + \frac{c+a}{ca}.\frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c}$$

$$= 2(\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2}) \leq 2.\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Chú ý: Trong lời giải trên:

1. Với câu a) chúng ta đã sử dụng các kết quả:
   - $l_a = \frac{2bc}{b+c}.\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, được chứng minh trong chủ đề 1 – Định lý hàm số cosin trong tam giác.
   - $2b^2 + 2c^2 \geq (b+c)^2$, được chứng minh bằng phương pháp biến đổi tương đương.

   Việc sử dụng kết quả $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ ta nhận được:

$$l_a + l_b + l_a \leq \sqrt{p(p-a)} + \sqrt{p(p-b)} + \sqrt{p(p-c)}$$

$$= \sqrt{p}(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})$$

$$\overset{\text{Bunhiacôpxki}}{\leq} \sqrt{p}(\sqrt{(1+1+1)[(p-a)+(p-b)+(p-c)]}) = p\sqrt{3}.$$

   Vậy $l_a + l_b + l_a \leq p\sqrt{3}$ (đôi khi được viết $l_a + l_b + l_a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$).

2. Với câu b) chúng ta đã sử dụng kết quả:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, có: $\cot gA + \cot gB + \cot gC = \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C$

Chứng minh rằng $tgA \geq \frac{8}{15}$.

Bài tập 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $2(ab + bc + ca) \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 8S\sqrt{3}$.

b. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \sqrt{\dfrac{3}{2rR}}$.

c. $\dfrac{1}{(p - a)^2} + \dfrac{1}{(p - b)^2} + \dfrac{1}{(p - c)^2} \geq \dfrac{1}{r^2}$.

d. $\dfrac{1}{a^2 + bc} + \dfrac{1}{b^2 + ca} + \dfrac{1}{c^2 + ab} \leq \dfrac{1}{4rR}$.

Bài tập 3: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.

b. $h_a + h_b + h_c \geq \dfrac{1}{2}(8\sqrt[4]{3}.\sqrt{S} - 3R)$.

c. $h_a + h_b + h_c \leq 3(r + R)$.

d. $h_a + h_b + h_c \leq \dfrac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 18S}{a + b + c}$.

e. $\dfrac{a}{h_a} + \dfrac{b}{h_b} + \dfrac{c}{h_c} \geq 2\sqrt{3}$.

f. $\dfrac{a}{h_a} + \dfrac{b}{h_b} + \dfrac{c}{h_c} \geq \dfrac{1}{\cos\dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\cos\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\cos\dfrac{C}{2}}$.

Bài tập 4: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $m_a.m_b.m_c \geq pS$.

b. $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$.

c. $\dfrac{m_a\sqrt{3} - a}{\operatorname{cotg} A} + \dfrac{m_b\sqrt{3} - b}{\operatorname{cotg} B} + \dfrac{m_c\sqrt{3} - c}{\operatorname{cotg} C} \leq 2S\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$.

d. $\dfrac{1}{(m_a + m_b - m_c)^2} + \dfrac{1}{(m_a - m_b + m_c)^2} + \dfrac{1}{(m_a - m_b - m_c)^2} \geq \dfrac{4}{3R^2}$.

e. $m_a + m_b + m_c \leq r + 4R$.

f. $m_a + m_b + m_c \geq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$.

g. $m_a.\cos\dfrac{A}{2} + m_b.\cos\dfrac{B}{2} + m_c.\cos\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{3}{4}(a + b + c)$.

Bài tập 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $l_a + l_b + l_c \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$. b. $\dfrac{ab}{l_c} + \dfrac{bc}{l_a} + \dfrac{ca}{l_b} \leq 6R$.

Bài tập 6: Cho ΔABC và M là điểm bất kỳ trong tam giác. Chứng minh rằng:

a. $MA.\cos\dfrac{A}{2} + MB.\cos\dfrac{B}{2} + MC.\cos\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{a + b + c}{2}$.

b. $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq \frac{4S}{\sqrt{3}}$.

c. (Erdoss): Gọi P, Q, R theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB, BC, CA. Chứng minh rằng:

$$MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR).$$

Bài tập 7: Cho ΔABC, các phân giác AA_1, BB_1 và CC_1 theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng:

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \leq \frac{9}{4}.$$

Bài tập 8: Cho ΔABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Kéo dài AI, BI, CI theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng:

a. $IA_2 + IB_2 + IC_2 \geq IA + IB + IC$. b. $AA_2.BB_2.CC_2 \geq \frac{8abc\sqrt{3}}{9}$.

Bài tập 9: Cho ΔABC, với $n \in N$, chứng minh rằng:

a. $\sin nA + \sin nB + \sin nC \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b. $\cos 2nA + \cos 2nB + \cos 2nC \geq -\frac{3}{2}$.

c. $\cos(2n + 1)A + \cos(2n + 1)B + \cos(2n + 1)C \leq \frac{3}{2}$.

Bài tập 10: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A + \sin B + \sin C)$.

b. $tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{C}{2} + 8\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \geq 2$.

Bài tập 11: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \geq \frac{4}{3}(1 + \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2})$, ΔABC nhọn.

b. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}(1 + \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2})$, ΔABC nhọn.

Bài toán 3: Nhận dạng tam giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bài toán về nhận dạng tam giác rất hay gặp trong các đề thi môn toán. Bài toán này đề cập đến một số hướng biến đổi để nhận dạng tam giác trong các bài toán như thế.

Dạng 1: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để tính góc hoặc cạnh.

Dạng 2: Xác định quan hệ giữa các cạnh hoặc các góc của tam giác.

Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các bất đẳng thức đại số.

Dạng 4: Sử dụng phương pháp đánh giá dựa trên các tính chất tam giác và hàm số.

Dạng 5: Dựng hình để tính toán các nhân tử trong biểu thức.

Ví dụ 1: Xác định dạng của ΔABC biết:

$$\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 0. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi VT của (1) về dạng:

$$VT = 2\sin(A + B).\cos(A - B) - \sin 2C$$

$$= 2\sin C.\cos(A - B) - 2\sin C.\cos C = 2[\cos(A - B) - \cos C].\sin C$$

$$= 2[\cos(A - B) + \cos(A + B)].\sin C = 4\cos A.\cos B.\sin C$$

Do đó (1) trở thành:

$$4\cos A.\cos B.\sin C = 0 \overset{\sin C \neq 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A hoặc B.

Ví dụ 2: Xác định dạng của ΔABC biết:

$$\text{cotg}\frac{B}{2} = \frac{a + c}{b}. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow \text{cotg}\frac{B}{2} = \frac{2R\sin A + 2R\sin C}{2R\sin B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} \Leftrightarrow \cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{2} = \pm\frac{A-C}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B + C \\ C = A + B \end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A hoặc C.}$$

Ví dụ 3: Xác định dạng của ΔABC, biết:

$$\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$\left(\frac{1 + \cos B}{\sin B}\right)^2 = \frac{(2a + c)^2}{4a^2 - c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c} = \frac{2R(2\sin A+\sin C)}{2R(2\sin A-\sin C)} = \frac{2\sin A+\sin C}{2\sin A-\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{(1-\cos B)+(1+\cos B)} = \frac{2\sin A+\sin C}{(2\sin A-\sin C)+(2\sin A+\sin C)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{2} = \frac{2\sin A+\sin C}{4\sin A} \Leftrightarrow 2\sin A.\cos B = \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A+B)+\sin(A-B) = \sin C \Leftrightarrow \sin(A-B) = 0$$

$$\overset{-\pi<A-B<\pi}{\Leftrightarrow} \quad A-B=0 \Leftrightarrow A=B$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

Ví dụ 4: Xác định dạng của ΔABC, biết:

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}. \qquad (1)$$

Giải

Cách 1: Biến đổi (1) về dạng:

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2}{4bc} = \frac{(2R.\sin A)^2}{4.2R.\sin B.2R.\sin C} = \frac{\sin^2 A}{4\sin B.\sin C} = \frac{4\sin^2\frac{A}{2}.\cos^2\frac{A}{2}}{4\sin B.\sin C}$$

$$\overset{\sin\frac{A}{2}\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \sin B.\sin C = \cos^2\frac{A}{2} \Leftrightarrow \cos(B-C) - \cos(B+C) = 1 + \cos A$$

$\Leftrightarrow \cos(B-C) = 1 \Leftrightarrow B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Cách 2: Ta có:

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos A) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$

Khi đó (1) được biến đổi về dạng:

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{a^2}{4bc} \Leftrightarrow (b-c)^2 = 0 <-> b = c < > \Delta ABC \text{ cân tại A.}$$

Chú ý: Như vậy với các biểu thức biểu thị mối quan hệ giữa các góc và các cạnh của tam giác ta thường lựa chọn hướng biến đổi chúng về biểu thức chỉ chứa các góc hoặc các cạnh thông qua định lý hàm số sin hoặc hàm số cos, còn với các đối tượng khác thông thường chúng ta sử dụng các công thức trung gian, để minh hoạ chúng ta xem xét biểu thức chứa đường cao trong ví dụ sau:

Ví dụ 5: Xác định dạng của ΔABC, biết:

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} = \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_c}{h_b} + \frac{h_b}{h_a}. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{b}} + \frac{\frac{2S}{b}}{\frac{2S}{c}} + \frac{\frac{2S}{c}}{\frac{2S}{a}} = \frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{c}} + \frac{\frac{2S}{c}}{\frac{2S}{b}} + \frac{\frac{2S}{b}}{\frac{2S}{a}} \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{a}{b}$$

$\Leftrightarrow b^2c + c^2a + a^2b = c^2b + b^2a + a^2c \Leftrightarrow (a - b)(b - c)(c - a) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = c \\ c = a \\ a = b \end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân.

Ví dụ 6: Xác định dạng của ΔABC biết các góc của tam giác thoả mãn phương trình:

$$\sin 2x + \sin x - \cos x = \frac{1}{2}.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng: $2\sin x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) = 0$,

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \xRightarrow{0 < x < \pi} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right..$$

Do đó ΔABC chỉ có thể có hai góc $\frac{\pi}{6}$ và một góc $\frac{2\pi}{3}$.

Vậy, ΔABC cân, góc ở đỉnh bằng $\frac{2\pi}{3}$.

Chú ý: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các bất đẳng thức đại số.

Ví dụ 7: Xác định dạng của ΔABC biết các góc của tam giác thoả mãn:

$$3(\cos A + 2\sin B) + 4(\sin A + 2\cos B) = 15. \qquad (1)$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacópxki, ta có:

$VT = (3\cos A + 4\sin A) + (6\sin B + 8\cos B)$

$\overset{\text{Bunhiacópxki}}{\leq} \sqrt{(3^2 + 4^2)(\cos^2 A + \sin^2 A)} + \sqrt{(6^2 + 8^2)(\sin^2 B + \cos^2 B)}$

$= 5 + 10 = 15.$

Do đó (1) xảy ra khi và chỉ khi :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos A}{3} = \dfrac{\sin A}{4} \\ \dfrac{\sin B}{6} = \dfrac{\cos B}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \operatorname{cotg} A = \operatorname{tg} B = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2}$$

$\Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Ví dụ 8: Xác định dạng của ΔABC biết các góc của tam giác thoả mãn:

$$\sin^4 A + 2(\sin^4 B + \sin^4 C) = 2(\sin^2 B + \sin^2 C).\sin^2 A. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$VT = \sin^4 A + (1^2 + 1^2)[(\sin^2 B)^2 + (\sin^2 C)^2] \overset{\text{Bunhiacôpxki}}{\geq} \sin^4 A + (\sin^2 B + \sin^2 C)^2$$

$$\overset{\text{Cosi}}{\geq} 2\sqrt{(\sin^2 B + \sin^2 C)^2 \sin^4 A}$$

$$= 2(\sin^2 B + \sin^2 C).\sin^2 A$$

Vậy (1) có được khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sin^2 B = \sin^2 C \\ \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ 2\sin^2 B = \sin^2 A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ \sqrt{2}\sin B = \sin(\pi - 2B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ \sqrt{2}\sin B = 2\sin B.\cos B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ \cos B = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C = \dfrac{\pi}{4} \\ A = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

⇔ ΔABC vuông cân tại A.

Ví dụ 9: Xác định dạng của ΔABC biết các góc của tam giác thoả mãn:

$$3\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C = \sqrt{\text{tg}^8 A + \text{tg}^8 B + \text{tg}^8 C}\,. \qquad (1)$$

Giải

Từ (1) ta có: $\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C > 0 \Leftrightarrow \text{tg}A, \text{tg}B, \text{tg}C > 0$.

Với ΔABC bất kỳ ta luôn có (*bạn đọc hãy chứng minh lại*):

$$\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C. \qquad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cô si, ta được:

$$\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C = \text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C \geq 3\sqrt[3]{\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C}$$

$$\Leftrightarrow (\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C)^2 \geq 27 \Leftrightarrow (\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C)^8 > 27(\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C)^6$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C}\right)^8 \geq 3\left(\sqrt[3]{\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C}\right)^6$$

$$\Rightarrow 9\text{tg}^2 A\text{tg}^2 B\text{tg}^2 C < 3\sqrt[3]{\text{tg}^8 A\text{tg}^8 B\text{tg}^8 C} < \text{tg}^8 A + \text{tg}^8 B + \text{tg}^8 C$$

$$\Leftrightarrow 3\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C < \sqrt{\text{tg}^8 A + \text{tg}^8 B + \text{tg}^8 C}\,.$$

Vậy, (1) xảy ra khi và chỉ khi

$\text{tg}A = \text{tg}B = \text{tg}C \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Ví dụ 10: Xác định dạng của ΔABC biết các góc của tam giác nhọn và thoả mãn:

$$\frac{\text{tg}^2 A}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\text{tg}^2 B}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\text{tg}^2 C}{\sin\frac{C}{2}} = 18. \qquad (1)$$

Giải

Với mọi ΔABC nhọn ta luôn có (*bạn đọc hãy chứng minh lại*):

$$\begin{cases} \mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C \ge 3\sqrt{3} & (1) \\ \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{3}{2} & (2) \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$\left(\frac{\mathrm{tg}^2A}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\mathrm{tg}^2B}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\mathrm{tg}^2C}{\sin\frac{C}{2}}\right)\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\ge (\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C)^2 \qquad (3)$$

$$\frac{\mathrm{tg}^2A}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\mathrm{tg}^2B}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\mathrm{tg}^2C}{\sin\frac{C}{2}} \ge \frac{(\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C)^2}{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}} \ge \frac{(3\sqrt{3})^2}{\frac{3}{2}} = 18.$$

Vậy, (1) xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức xảy ra tại (1), (2), (3)

$\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Chú ý: Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng hai bất đẳng thức:

- $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C \ge 3\sqrt{3}$.
- $\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 11: Xác định dạng của ΔABC biết:

$$a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C = \frac{a + b + c}{2}. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$(a - b).(\cos A - \cos B) + (b - c).(\cos B - \cos C) + (c - a).(\cos C - \cos A) = 0. \qquad (2)$$

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử $A \le B \le C$ suy ra:

- $a \le b \le c$ đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.
- $\cos A \ge \cos B \ge \cos C$ hàm số cos nghịch biến trên $(0, \pi)$.

Theo nhận xét trên $VT_{(2)} \le 0$, do đó (2) có được khi:

$$\begin{cases} (a - b)(\cos A - \cos B) = 0 \\ (b - c)(\cos B - \cos C) = 0 \\ (c - a)(\cos C - \cos A) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Ví dụ 12: Xác định dạng của ΔABC biết:

$$\sin^2A + \sin^2B = \sqrt[2006]{\sin C} \qquad (*)$$

và các góc A, B nhọn.

Giải

Vì $0 < \sin C \le 1$ nên:

$$\sqrt[2006]{\sin C} \le \sqrt[2006]{1} = 1 \Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B \le 1. \qquad (1)$$

$$\sqrt[2006]{\sin C} = \sin^{\frac{1}{2006}} C \ge \sin^2 C$$

$$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B \ge \sin^2 C \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \ge 0. \qquad (2)$$

Mặt khác:

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B)$$

$$= 1 - \cos(A + B).\cos(A - B)$$

$$= 1 + \cos C.\cos(A - B) \underset{0<A,B<\frac{\pi}{2}}{\overset{(2)}{\ge}} 1. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra để có (*) thì :

$$\begin{cases} \sin C = 1 \\ \cos C.\cos(A - B) = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại C.}$$

Ví dụ 13:

a. Với $\forall \alpha \ge 1$ và $\forall x > 0$, chứng minh rằng: $x^\alpha \ge \alpha x - \alpha + 1$.

b. Xác định dạng của ΔABC, biết:

$$\left(\text{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\text{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\text{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} = 3^{1-\sqrt{2}}.$$

Giải

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. Ta có: $\text{tg}^2\frac{A}{2} + \text{tg}^2\frac{B}{2} + \text{tg}^2\frac{C}{2} \ge 1$.

Do đó, chọn $x = 3\text{tg}^2\frac{A}{2}$ và $\alpha = \sqrt{2}$, áp dụng kết quả câu a) ta được:

$$\left(3\text{tg}^2\frac{A}{2}\right)^{\sqrt{2}} \ge 3\sqrt{2}\,\text{tg}^2\frac{A}{2} - \sqrt{2} + 1, \qquad (1)$$

tương tự ta cũng nhận được:

$$\left(3\text{tg}^2\frac{B}{2}\right)^{\sqrt{2}} > 3\sqrt{2}\,\text{tg}^2\frac{B}{2} - \sqrt{2} + 1, \qquad (2)$$

$$\left(3\text{tg}^2\frac{C}{2}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3\sqrt{2}\,\text{tg}^2\frac{C}{2} - \sqrt{2} + 1. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\left(3\text{tg}^2\frac{A}{2}\right)^{\sqrt{2}} + \left(3\text{tg}^2\frac{B}{2}\right)^{\sqrt{2}} + \left(3\text{tg}^2\frac{C}{2}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3\sqrt{2}\left(\text{tg}^2\frac{A}{2} + \text{tg}^2\frac{B}{2} + \text{tg}^2\frac{C}{2}\right) - 3\sqrt{2} + 3$$

$$\geq 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 3 = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\text{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\text{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$.

b. $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A.\sin B$.

c. $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$.

d. $\dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}(\text{cotg}^2 A + \text{cotg}^2 B)$.

e. $2\cos A.\sin B.\sin C + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \dfrac{17}{4}$.

Bài tập 2: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} = 2\sqrt{\cos\dfrac{C}{2}}$.

Mở rộng với $\sqrt[n]{\sin A} + \sqrt[n]{\sin B} = 2\sqrt[n]{\cos\dfrac{C}{2}}$.

b. $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} = \dfrac{2}{\cos\dfrac{C}{2}}$.

Mở rộng với $\dfrac{1}{\sqrt[n]{\sin A}} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{\sin B}} = \dfrac{2}{\sqrt[n]{\cos\dfrac{C}{2}}}$.

c. $\text{tg}^3 A + \text{tg}^3 B = 2\text{t}$ [illegible] với các góc A, B nhọn.

Mở rộng với $tg^n A + tg^n B = 2tg^n \frac{A+B}{2}$, với các góc A, B nhọn.

d. $\sqrt{tgA} + \sqrt{tgB} = 2\sqrt{cotg\frac{C}{2}}$, với các góc A, B nhọn.

Mở rộng với $\sqrt[n]{tgA} + \sqrt[n]{tgB} = 2\sqrt[n]{cotg\frac{C}{2}}$, với các góc A, B nhọn.

Bài tập 3: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{2a}}$.

b. $\cos A + 2\sin\frac{A}{2} = \frac{r+R}{R}$

c. $a = 2b.\cos C$.

Bài tập 4: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $h_a = \sqrt{p(p-a)}$.

b. $h_a = \sqrt{bc}.\cos\frac{A}{2}$.

Bài tập 5: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

b. $p = (1 + \sqrt{2})R$.

Bài tập 6: Xác định dạng của ΔABC biết:

a. $\sin A + \sin B + \sin C + \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 0$.

b. $\cos A + \cos B + \cos C + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 0$.

c. $tgA + tgB + tgC + tg2A + tg2B + tg2C = 0$.

d. $cotgA + cotgB + cotgC + cotg2A + cotg2B + cotg2C = 0$.

Bài tập 7: Xác định dạng của ΔABC biết:

a. $\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A \\ tgB + tgC = 2tgA \end{cases}$.

b. $\frac{4\sin A\sin B\sin C}{ab+bc+ca} = \frac{a+b+c}{18R^3}$.

c. $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - (cotgA + cotgB + cotgC) = \sqrt{3}$.

d. $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1}{8}\cos A\cos B\cos C$.

CHƯƠNG II

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHỦ ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

***Định nghĩa**: Phương trình lượng giác là phương trình chứa một hay nhiều hàm số lượng giác của một ẩn.*

II. BỐN DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình:

$$\sin x = m$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

Bước 2. Nếu $|m| < 1$, xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua sin của **góc đặc biệt, giả sử** α, khi đó phương trình có dạng :

$$\sin x = \sin\alpha <> \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua sin của góc đặc biệt, khi đó đặt $m = \sin\alpha$, ta được:

$$\sin x = \sin\alpha <> \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt

- $\sin x = 0 <> x = k\pi.,\ k \in \mathbb{Z}.$
- $\sin x = 1 <> x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$
- $\sin x = -1 <> x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sin x = \frac{1}{3}$.

b. $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x + \frac{\pi}{3}) = 0$.

Giải

a. Đặt $\frac{1}{3} = \sin\alpha$, khi đó: $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x + \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = -\sin(3x + \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(-3x - \frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = -3x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - (-3x - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5} \\ x = -\frac{19\pi}{12} - 2k\pi \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sin(\pi\sin 2x) = 1$.

Giải

Ta có:

$$\sin(\pi\sin 2x) = 1 \Leftrightarrow \pi\sin 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}. (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|\frac{1}{2} + 2k\right| \le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le k \le \frac{1}{4} \overset{k \in Z}{\Leftrightarrow} k = 0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2l\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + l\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + l\pi \end{array}\right., l \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình:

$$\cos x = m.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

Bước 2 Nếu $|m| < 1$, xét hai trường hợp:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cos của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\cos x = \cos\alpha <> \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cos của góc đặc biệt, khi đó đặt m = cosα, ta được

$$\cos x = \cos\alpha <> \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt

- $\cos x = 0 <> x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
- $\cos x = 1 <> x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
- $\cos x = -1 <> x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x = \cos 2x$.

b. $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0.$

Giải

a. Ta có:

$$\sin 3x = \cos 2x <> \sin 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

$$<> \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \\ 3x = \pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) + 2k\pi \end{array}\right. <> \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 <> \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$<> \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})$$

$$<> \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -x - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. <> \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Giải

Phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+4k & (1)\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}+4k & (2)\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

- Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|\frac{1}{2}+4k\right|\le 1\Leftrightarrow-\frac{3}{8}\le k\le\frac{1}{8}\overset{k\in Z}{\Leftrightarrow}k=0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2l\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2l\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{7\pi}{12}+2l\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+2l\pi\end{array}\right., l\in\mathbb{Z}.\quad(3)$$

- Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|-\frac{1}{2}+4k\right|\le 1\Leftrightarrow-\frac{1}{8}\le k\le\frac{3}{8}\overset{k\in Z}{\Leftrightarrow}k=0.$$

Khi đó (2) có dạng: $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+2l\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{2\pi}{3}+2l\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{11\pi}{12}+2l\pi\\ x=-\frac{5\pi}{12}+2l\pi\end{array}\right., l\in\mathbb{Z}.\quad(4)$$

Kết hợp (3) và (4), ta được: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{11\pi}{12}+l\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+l\pi\end{array}\right., l\in\mathbb{Z}.$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài toán 3: Giải và biện luận phương trình:

$$\mathrm{tg}x=m.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Đặt điều kiện:

$$\cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua tg của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng:

$$\text{tg}x = \text{tg}\alpha <> x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua tg của góc đặc biệt, khi đó đặt m $= \text{tg}\alpha$, ta được

$$\text{tg}x = \text{tg}\alpha <> x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\text{tg}[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)] = 1.$$

Giải

Điều kiện

$$\cos[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)] \neq 0. \qquad (*)$$

Phương trình tương đương với:

$$\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x) = \frac{\pi}{4} + k\pi <> \cos x + \sin x = 1 + 4k,\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|1 + 4k| < \sqrt{2} <> -\frac{\sqrt{2}+1}{4} \le k \le \frac{\sqrt{2}-1}{4} \overset{k\in Z}{<>} k = 0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\cos x + \sin x = 1 <> \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 <> \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$<> \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi \end{array}\right. <> \left[\begin{array}{l} x = 2l\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{array}\right.,\ l \in \mathbf{Z} \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài toán 4: Giải và biện luận phương trình:

$$\text{cotg}x = m.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Đặt điều kiện:

$$\sin x \neq 0 <> x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cotg của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\text{cotg}x = \text{cotg}\alpha <> x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cotg của góc đặc biệt, khi đó đặt $m = \cot g\alpha$, ta được

$$\cot gx = \cot g\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $\cot g(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. b. $\cos x = \sqrt{3}\sin x$.

Giải

a. Điều kiện:

$$\sin(\frac{\pi}{4} - x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} - k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

Ta có: $\cot g(\frac{\pi}{4} - x) = \cot g\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thoả mãn điều kiện (*).

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Ta có: $\cos x = \sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow \cot gx = \sqrt{3} = \cot g\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài toán 5: Giải và biện luận theo m số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình lượng giác cơ bản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử với phương trình:

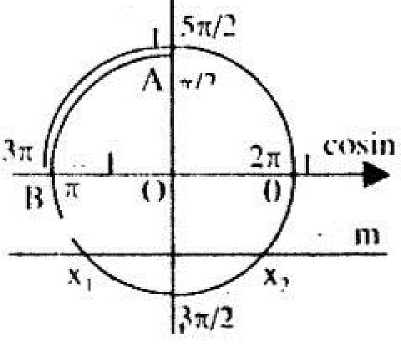
$$\sin x = m.$$

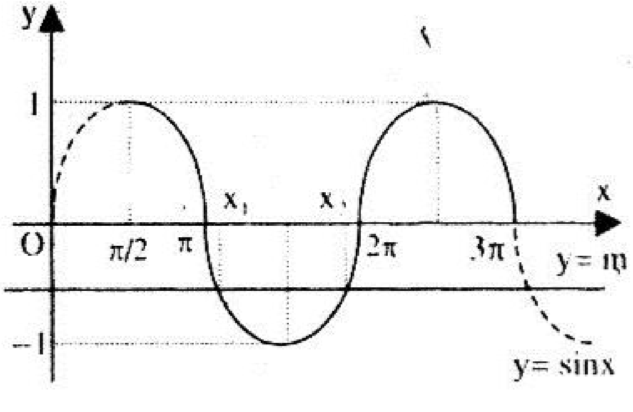
Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

a. Biểu diễn (α, β) trên đường tròn đơn vị thành cung $\overset{\frown}{AB}$

b. Tịnh tiến đường thẳng m song song với trục cosin, khi đó số giao điểm của nó với cung $\overset{\frown}{AB}$ bằng số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình.





Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ đồ thị hàm số y = sinx, lấy trên (α, β).

Bước 2. Tịnh tiến đường thẳng y = m song song với trục Ox, khi đó số giao điểm của nó với phần đồ thị hàm số y = sinx bằng số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình.

Chú ý: Phương pháp trên được mở rộng tự nhiên cho:

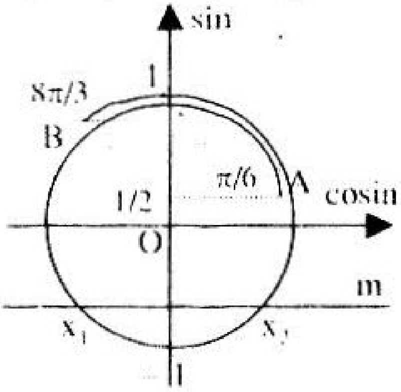
1. Phương trình cosx = m, với lưu ý khi sử dụng cách 1 ta tịnh tiến đường thẳng m song song với trục sin.
2. Với các phương trình tgx = m và cotgx = m ta chỉ có thể sử dụng cách 2.

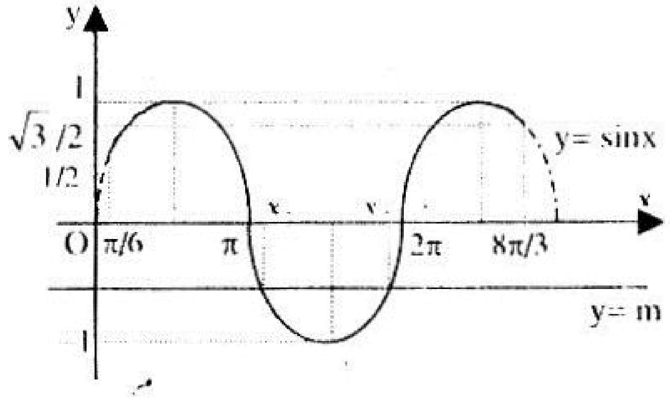
Ví dụ 1: Biện luận theo m số nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{6}, \frac{8\pi}{3}]$ của phương trình

$$\sin x = m.$$

Giải

Ta lựa chọn một trong hai cách biểu diễn





Kết luận: đặt $D = (\frac{\pi}{6}, \frac{8\pi}{3})$, ta có:

- Với $|m| > 1$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = -1$, phương trình có 1 nghiệm thuộc D.
- Với $-1 < m < \frac{1}{2}$, hoặc $m = 1$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thuộc D.
- Với $\frac{1}{2} < m < \frac{\sqrt{3}}{2}$, phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc D.
- Với $\frac{\sqrt{3}}{2} < m < 1$, phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc D.

Ví dụ 2: Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(-\frac{5\pi}{4}, \pi)$ của phương trình

$$(m + 1)\sin x = (m - 1)\cos x. \qquad (1)$$

Giải

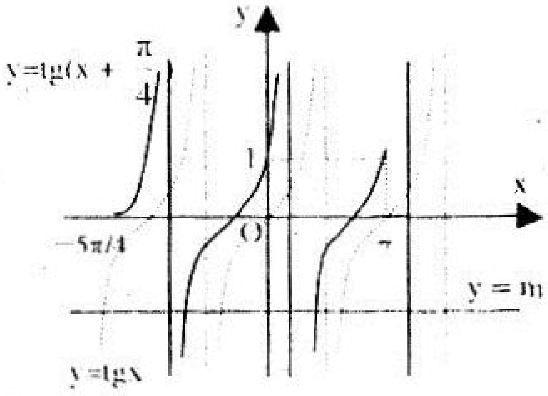
Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin x + \cos x = m(\cos x - \sin x) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = m\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = m.$$

Ta có kết luận:

- Với $m > 1$ hoặc $m \le 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thuộc D.
- Với $0 < m < 1$, phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc D.



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sin(\pi\cos 2x) = 1$.

b. $\cos(\pi\cos 3x) = 1$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $\cos(\pi\sin x) = 1$.

b. $\sin\frac{\pi}{x} = \cos(\pi x)$.

c. $\cos[\frac{\pi}{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2}$.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $tg[\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x)] = 1$.

b. $cotg[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)] = 1$.

Bài tập 4: Giải và biện luận các phương trình sau:

a. $\cos(x + \alpha) + \cos(x - \alpha) = 2\cos\alpha$.

b. $\sin(x + \alpha) + \cos(x - \alpha) = 1 + \sin\alpha$.

c. $(m + 1)\sin 2x + 1 - m^2 = 0$.

d. $(m + 2)tg2x - \sqrt{m} = 0$.

Bài tập 5: (ĐHSP II – 2000): Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$\cos[\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800})] = 1.$$

Bài tập 6: Giải phương trình:

$$\sqrt{-x^8 + 3x^4 - 2}\,.\sin[\pi(16x^2 + 2x)] = 0.$$

Bài tập 7: Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{a^2}{1 - tg^2x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}.$$

Bài tập 8: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

a. $\sin x = m$, với $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}]$.

b. $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = m$, với $x \in [-\frac{\pi}{24}, \frac{19\pi}{8}]$.

c. $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = m$, với $x \in [\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}]$.

d. $cotg(x - \frac{\pi}{4}) = m$, với $x \in (-\frac{5\pi}{4}, \pi)$.

CHỦ ĐỀ 2

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Đặt hàm số lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ nếu có (thí dụ $t = \sin x$ hoặc $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$), rồi giải phương trình theo ẩn phụ này.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{3}\,\mathrm{cotg}^2x - 4\mathrm{cotg}x + \sqrt{3} = 0$.

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $\mathrm{cotg}x = t$, khi đó phương trình có dạng: $\sqrt{3}t^2 - 4t + \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{3} \\ t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{cotg}x = \sqrt{3} \\ \mathrm{cotg}x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$\sin^2 3x + (m^2 - 3)\sin 3x + m^2 - 4 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$.

Giải

Đặt $t = \sin 3x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 + (m^2 - 3)t + m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 4 - m^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = -1 \\ \sin 3x = 4 - m^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ \sin 3x = 4 - m^2 \quad (2) \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

a. Với $m = 1$, phương trình (2) có dạng: $\sin 3x = 3$ vô nghiệm

Vậy với $m = 1$ phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b. Trước hết nghiệm

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \text{ là } x_1 = \frac{7\pi}{6}.$$

Vậy để phương trình (1) có đúng 4 nghiệm thuộc $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ điều kiện là phương trình (2) có đúng 3 nghiệm khác $\frac{7\pi}{6}$ thuộc $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.

Vì $x \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \Leftrightarrow 3x \in [2\pi, 4\pi]$.

do đó điều kiện là

$$\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

khi đó ta được các nghiệm $3x \in [2\pi, 3\pi, 4\pi] \Leftrightarrow x \in [\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}]$

Vậy với $m = \pm 2$ phương trình (1) có 4 nghiệm thuộc $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.

Chú ý: Thông thường phương trình ban đầu chưa phải phương trình bậc hai theo 1 hàm số lượng giác, khi đó ta cần thực hiện một vài phép biến đổi lượng giác dựa trên nguyên tắc:

1. Nếu phương trình chứa nhiều hàm lượng giác khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa một hàm.
2. Nếu phương trình chứa các hàm lượng giác của nhiều cung khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa các hàm lượng giác của một cung.

Ví dụ 3: Cho phương trình: $4\sin^2 2x + 8\cos^2 x - 5 + 3m = 0.$ (1)

a. Giải phương trình với $m = -\frac{4}{3}$.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng: $4(1 - \cos^2 2x) + 4(1 + \cos 2x) - 5 + 3m = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3 - 3m = 0.$$

Đặt $t = \cos 2x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$4t^2 - 4t - 3 - 3m = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t - 3 = 3m. \quad (2)$$

a. Với $m = \frac{4}{3}$, phương trình có dạng:

$$4t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy với $m = -\frac{4}{3}$, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm thuộc } [-1, 1]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ có 1 nghiệm thuộc } [-1,1] \\ (2) \text{ có 2 nghiệm thuộc } [-1,1] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1).f(1) < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta' > 0 \\ af(-1) > 0 \\ af(1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (5-3m)(-3-3m) < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} 16+12m > 0 \\ 5-3m > 0 \\ -3-3m > 0 \\ -1 < \frac{1}{2} < 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m < 5/3 \\ \left\{\begin{array}{l} m > -4/3 \\ m < 5/3 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < m < \frac{5}{3} \overset{m \in Z}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right..$$

Vậy với $m = \pm 1$ hoặc $m = 0$ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 4: Cho phương trình:

$$\frac{m^2-1}{\cos^2 x} - 2m\mathrm{tg}x - m^2 + 2 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Tìm m để phương trình có đúng ba nghiệm thuộc $(-\pi, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(m^2-1)(1+\mathrm{tg}^2x) - 2m\mathrm{tg}x - m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (m^2-1)\mathrm{tg}^2x - 2m\mathrm{tg}x + 1 = 0.$$

Đặt $\mathrm{tg}x = t$, khi đó phương trình có dạng:

$$(m^2-1)t^2 - 2mt + 1 = 0 \Leftrightarrow [(m-1)t - 1][(m+1)t - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m-1)t = 1 \\ (m+1)t = 1 \end{array}\right.. \qquad (2)$$

a. Với $m = 2$, ta được:

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = 1 = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} \\ \mathrm{tg}x = \frac{1}{3} = \mathrm{tg}\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy với $m = 2$, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng ba nghiệm thuộc $(-\pi, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{m+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |m| < 1.$$

Vậy, với $|m| < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: (ĐH Đà Nẵng – 1996): Cho phương trình:

$$\cos^2 x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = \frac{3}{2}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Bài tập 2: Cho phương trình: $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3m$.

a. Giải phương trình với $m = -\frac{4}{3}$.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Bài tập 3: Cho phương trình: $\cos 2x + 5\sin x + m = 0$.

a. (ĐHNN Hà Nội – 1997): Giải phương trình với m = 2.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Bài tập 4: Cho phương trình:

$$4\cos^2 x - 2(m - 1)\cos x - m = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = \sqrt{3}$.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Bài tập 5: Xác định m để phương trình:

$$m\cos 2x - 4(m - 2)\cos x + 3(m - 2) = 0$$

có đúng 2 nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 6: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$(m - 1)\sin^2 x - 2(m + 1)\cos x + 2m - 1 = 0$$

Bài tập 7: Giải và biện luận theo a, b phương trình:

$$\cos ax + \cos 2bx - \cos[(a + 2b)x] = 1$$

Bài tập 8: Biện luận số nghiệm của phương trình:

$$\cos^2 x + (1 - m)\cos x + m - 1 = 0 \text{ với } 0 < x < \pi$$

tuỳ theo các giá trị của m.

Bài toán 2: Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx có dạng:

$$a\sin x + b\cos x = c. \qquad (1)$$

Để giải phương trình (1) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Kiểm tra:

1. Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, khi đó để tìm nghiệm của phương trình (1) ta thực hiện tiếp bước 2.

Bước 2. Chia hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ nên tồn tại góc β sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta .$$

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$\sin x.\cos\beta + \sin\beta.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của hàm số sin.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Với $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$, kiểm tra vào phương trình

Bước 2. Với $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi$, đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, suy ra

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$a.\frac{2t}{1+t^2} + b.\frac{1-t^2}{1+t^2} = c \Leftrightarrow (c+b)t^2 - 2at + c - b = 0.(2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t.

Cách 3: Với những yêu cầu biện luận tính chất nghiệm của phương trình trong (α, β), ta có thể lựa chọn phương pháp điều kiện cần và đủ.

Nhận xét quan trọng:

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.

2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D với $D \subset [0, 2\pi]$.
3. Cách 3 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu biện luận theo tham số để phương trình k có nghiệm thuộc tập D với $D \cap [0, 2\pi] \neq \varnothing$.
4. Từ cách giải 1 ta có được kết quả sau:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$$

kết quả đó gợi ý cho bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số dạng $y = a.\sin x + b.\cos x$, $y = \dfrac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x}$ và phương pháp đánh giá cho một số phương trình lượng giác.

Dạng đặc biệt:

- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$
- $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sin 2x - 3\cos 2x = 3$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Đặt $\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \cos\alpha$ thì $\dfrac{3}{\sqrt{10}} = \sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin 2x.\cos\alpha - \cos 2x.\sin\alpha = \sin\alpha \Leftrightarrow \sin(2x - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \alpha = \alpha + 2k\pi \\ 2x - \alpha = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 2x = 3(1 + \cos 2x) \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x = 6\cos^2 x \Leftrightarrow (\sin x - 3\cos x).\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - 3\cos x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = 3 = \mathrm{tg}\alpha \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Việc lựa chọn các phép biến đổi lượng giác phù hợp trong nhiều trường hợp ta sẽ tìm được phép biểu diễn chẵn cho các họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $(1+\sqrt{3})\sin x + (1-\sqrt{3})\cos x = 2$.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin x + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Đặt $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \cos\alpha$ thì $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin x.\cos\alpha + \cos x.\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\alpha = \frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x+\alpha = \pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4}-\alpha+2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4}-\alpha+2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x + \cos x) + \sqrt{3}(\sin x - \cos x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) - \sqrt{6}\cos(x+\frac{\pi}{4}) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}).\cos\frac{\pi}{3} - \cos(x+\frac{\pi}{4}).\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{12} = \pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét:

1. Như vậy bằng cách 1 ta tìm được nghiệm của phương trình không tường minh, trong khi đó nếu sử dụng cách 2 ta thấy nghiệm của phương trình rất chẵn.

2. Một vài tài liệu tham khảo giải phương trình bằng cách đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, dẫn tới phương trình:

$$(3-\sqrt{3})t^2 - 2(1+\sqrt{3})t + \sqrt{3}+1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee t_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

- Với $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ta được:

$$\text{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

- Với $t_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ ta được:

$$\text{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = -\frac{\text{tg}\frac{\pi}{3} + \text{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \text{tg}\frac{\pi}{3}.\text{tg}\frac{\pi}{4}} = -\text{tg}\frac{7\pi}{12} = \text{tg}\frac{5\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{12} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Chú ý: Các em học sinh cần có thói quen kiểm tra điều kiện $a^2 + b^2 > c^2$ ra nháp trước khi giải phương trình bởi có nhiều bài thi đã cố tình tạo ra những phương trình không thoả mãn điều kiện trên với mục đích kiểm tra kiến thức cơ bản của các em. Cụ thể như đề thi ĐHGTVT – 2000.

Ví dụ 3: (ĐHGTVT – 2000): Giải phương trình:

$$2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}(1 + \cos 2x) = 3 + \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + (\sqrt{2} - 1)\cos 2x = 3 - \sqrt{2}$$

Ta có:

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} - 1 \\ c = 3 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{2} \\ c^2 = (3 - \sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2.$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$2(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 3\sin 2x + \sqrt{7}\cos 2x$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x = 3\sin 2x + \sqrt{7}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{3}{4}\sin 2x + \frac{\sqrt{7}}{4}\cos 2x$$

Đặt $\frac{3}{4} = \cos\alpha$ thì $\frac{\sqrt{7}}{4} = \sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin x.\cos\frac{\pi}{6} - \cos x\sin\frac{\pi}{6} = \sin 2x\cos\alpha + \cos 2x\sin\alpha \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\alpha = x-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x+\alpha = \pi - x+\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6}-\alpha+2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{18}-\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Ví dụ trên đã minh hoạ cụ thể phương pháp giải phương trình dạng:

$$a.\sin(kx) + b.\cos(kx) = c.\sin(lx) + d.\cos(lx) \qquad \text{(I)}$$

với điều kiện $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Sự mở rộng khác cho dạng phương trình trên là:

$$a.\sin(kx) + b.\cos(kx) = \sqrt{a^2+b^2}.\sin(lx). \qquad \text{(II)}$$

Để minh hoạ ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: Giải phương trình: $2\sin x(\cos x - 1) = \sqrt{3}\cos 2x$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin x.\cos x - 2\sin x = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin x \qquad (*)$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin x \Leftrightarrow \sin 2x.\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x.\sin\frac{\pi}{3} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\dfrac{\pi}{3} = x+2k\pi \\ 2x-\dfrac{\pi}{3} = \pi - x+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 6: Cho phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x - m\cos 2x = 1$.

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm với mọi m.

Giải

a. Với m = 1, phương trình có dạng:

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x.\cos\frac{\pi}{6} - \cos 2x.\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x-\dfrac{\pi}{6} = \pi-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy với m = 1 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có: $a^2 + b^2 = 3 + m^2 > 1 = c^2, \forall m$

Vậy, phương trình có nghiệm với mọi m.

Ví dụ 7: (ĐHKT – 2001): Giải và biện luận phương trình:

$$4m(\sin x + \cos x) = 4m^2 + 2(\cos x - \sin x) + 3.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng: $2(2m + 1)\sin x + 2(2m - 1)\cos x = 4m^2 + 3$

Xét hiệu:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 4(2m + 1)^2 + 4(2m - 1)^2 - (4m^2 + 3)^2$$
$$= -(16m^4 - 8m^2 + 1) = -(4m^2 - 1)^2 < 0$$

Vậy phương trình chỉ có nghiệm

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}.$$

- Với $m = \frac{1}{2}$, phương trình có dạng: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Với $m = -\frac{1}{2}$, phương trình có dạng: $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Với $m \neq \pm\frac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 8: Cho phương trình: $(m + 2)\sin x - 2m\cos x = 2m + 2$. (1)

a. Giải phương trình với $m = -2$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

Giải

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$, thay vào phương trình ta được:

$$(m + 2)\sin(\pi + 2k\pi) - 2m\cos(\pi + 2k\pi) = 2m + 2$$
$$\Leftrightarrow 2m = 2m + 2, \text{ vô lí.}$$

Vậy $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ không phải là nghiệm của phương trình với mọi m.

Trường hợp 2: Với $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, suy ra $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$\frac{(m+2)t}{1+t^2} - \frac{2m(1-t^2)}{1+t^2} = 2m + 2 \Leftrightarrow f(t) = t^2 - (m + 2)t + 2m + 1 = 0. \quad (2)$$

a. Với $m = -2$, phương trình (2) có dạng:

$$t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{3} \\ t = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, với $m = -2$, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Vì $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, 0] \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} \in [-\dfrac{\pi}{4}, 0]$ suy ra $t \in [-1, 0]$.

Để (1) có nghiệm thuộc $[-\dfrac{\pi}{2}, 0] \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc $[-1, 0]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có 1 nghiệm thuộc } [-1,0] \\ \text{(2) có 2 nghiệm thuộc } [-1,0] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1).f(0) < 0 \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(-1) > 0 \\ af(0) > 0 \\ -1 < \dfrac{S}{2} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} < m < -\dfrac{1}{2}.$$

Vậy, với $-\dfrac{4}{3} \le m \le -\dfrac{1}{2}$ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 9: Cho phương trình: $\sqrt{3}\,\text{sinx} + \text{mcosx} = 1$.

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [0, 2\pi)$ sao cho $x_1 + x_2 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có nghiệm $x = \alpha \in [0, \dfrac{2\pi}{3}]$, khi đó $x = \dfrac{2\pi}{3} - \alpha$ cũng là nghiệm, như vậy:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin\alpha + m\cos\alpha = 1 \\ \sqrt{3}\sin(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha) + m\cos(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\cos\alpha = 1 - \sqrt{3}\sin\alpha \\ m(-\dfrac{1}{2}\cos\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) = 1 - \sqrt{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \dfrac{1}{2}\sin\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{1 - \sqrt{3}\sin\alpha}{2 - 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}$$

$\Leftrightarrow (2 - 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha)\cos\alpha = (-\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)(1 - \sqrt{3}\sin\alpha)$

$\Leftrightarrow 3\cos2\alpha + \sqrt{3}\sin2\alpha = 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos2\alpha + \dfrac{1}{2}\sin2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \dfrac{1}{2}\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \cos2\alpha.\cos\dfrac{\pi}{6} + \sin2\alpha.\sin\dfrac{\pi}{6} = \cos\alpha.\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin\alpha.\cos\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \cos(2\alpha - \dfrac{\pi}{6}) = \cos(\alpha + \dfrac{\pi}{6})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha - \frac{\pi}{6} = \alpha + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2\alpha - \frac{\pi}{6} = -\alpha - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{3} \\ \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

- Với $\alpha = \frac{\pi}{3}$, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} + m\cos\frac{\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

- Với $\alpha = 0$, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3}\sin 0 + m\cos 0 = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

- Với $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3} + m\cos\frac{2\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = \pm 1$ là điều kiện cần.

Điều kiện đủ:

- Với $m = 1$, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \overset{x\in[0,2\pi)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Nhận xét rằng khi đó $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3}$, do đó $m = 1$ thoả mãn.

- Với $m = -1$ – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = \sin^2 x + 1$.

b. $3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x = 4\sin^3 x - 1$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

b. $2\cos x(\sin x - 1) = \sqrt{3}\cos 2x$.

c. $2\sin 3x - \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 0$.

d. $3\sin 2x + 4\cos 2x + 5\cos 2003x = 0$.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2\sin 1972x = 0$.

b. $\sin x = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3}\cos x)$.

Bài tập 4: Giải các phương trình sau:

a. $(1 - \sqrt{3})\sin x + (1 + \sqrt{3})\cos x = 2$.

b. $\sin 2x + (\sqrt{3} - 2)\cos 2x = 1$.

Bài tập 5: Giải các phương trình sau:

a. $3\cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(\cos 2x + \sin x)$.

b. $\sqrt{2}\cos(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}) - \sqrt{6}\sin(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}) = 2\sin(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}) - 2\sin(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6})$.

Bài tập 6: Cho phương trình: $(m - 1)\sin x - \cos x = 1$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Bài tập 7: Cho phương trình: $m\sin x + 2\cos x = 1 - m$.

a. Giải phương trình với $m = 2\sqrt{3}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Bài tập 8: Cho phương trình: $\sqrt{3}\sin x - \cos x = m$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(-\frac{5\pi}{6}, 3\pi]$ của phương trình.

Bài tập 9: Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ và 2 nghiệm này cách nhau $\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{3}\sin 3x + m\cos 3x = \sqrt{2}.$$

Bài tập 10: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$\frac{a - b\cos x}{\sin x} = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}\,\mathrm{tg}y}{1 + \mathrm{tg}^2 y}.$$

Bài tập 11: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$m\sin x + (2m - 1)\cos x = 3m - 1 \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Bài toán 3: Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx có dạng:

$$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d. \quad (1)$$

Để giải phương trình (1) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Với cosx = 0 <=> $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó phương trình (1) có dạng a = d.

- Nếu a = d, thì (1) nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.
- Nếu $a \neq d$, thì (1) không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Bước 2. Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được

$$a\,tg^2x + b\,tgx + c = d(1 + tg^2x)$$

Đặt t = tgx, phương trình có dạng:

$$(a - d)t^2 + bt + c - d = 0 \qquad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t

Cách 2: Sử dụng các công thức:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ và } \sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

ta được :

$$b.\sin 2x + (c - a)\cos 2x = d - c - a. \qquad (3)$$

Đây là phương trình bậc nhất của sin và cos.

Nhận xét quan trọng:

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D.
2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$2\sqrt{3}\cos^2 x + 6\sin x.\cos x = 3 + \sqrt{3}.$$

Giải

Cách 1: Xét hai trường hợp:

- Với cosx = 0 <=> $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó phương trình có dạng

$0 = 3 + \sqrt{3}$, vô lí.

Vậy, phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được:

$$2\sqrt{3} + 6tgx = (3 + \sqrt{3})(1 + tg^2x)$$

$$\Leftrightarrow (3+\sqrt{3})\mathrm{tg}^2x - 6\mathrm{tg}x + 3 - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x = 1\\ \mathrm{tg}x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \mathrm{tg}\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \alpha + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{3}(1+\cos2x) + 3\sin2x = 3 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos2x + \sqrt{3}\sin2x = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $m.\sin^2x - 3\sin x.\cos x - m - 1 = 0.$ (1)

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \frac{3\pi}{2})$.

Giải

Xét hai trường hợp

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

  Khi đó phương trình có dạng

  $-1 = 0$, vô lí.

  Vậy, phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

  Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x \neq 0$, ta được

  $$m.\mathrm{tg}^2x - 3\mathrm{tg}x - (m+1)(1+\mathrm{tg}^2x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2x + 3\mathrm{tg}x + m + 1 = 0.$$

  Đặt $t = \mathrm{tg}x$, phương trình có dạng: $f(t) = t^2 + 3t + m + 1 = 0$ (2)

a. Với $m = 1$, ta được:

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = -1\\ t = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x = -1\\ \mathrm{tg}x = -2 = \mathrm{tg}\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \alpha + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy với $m = 1$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \frac{3\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt thoả mãn $t_1 < 0 < t_2$

$\Leftrightarrow af(0) < 0 \Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1.$

Vậy $m < -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Nhiều phương trình ở dạng ban đầu chưa phải là phương trình đẳng cấp bậc hai, khi đó các em học sinh cần biết đánh giá hoặc thực hiện một vài phép biến đổi lượng giác.

Ví dụ 3: Cho phương trình: $m.\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$, với $m \neq 0$. (1)

a. (ĐHAN 1998): Giải phương trình khi $m = \sqrt{3}$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm

c. Giả sử m là giá trị làm cho phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $x_1 + x_2 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Tính $\cos 2(x_1 + x_2)$ theo m.

Giải

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$m\sin x.\cos x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow m\sin x.\cos x = \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ m.\cos x = \sin x \end{array}\right. \overset{\cos x \neq 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \mathrm{tg}x = m \end{array}\right. . \quad \text{(I)}$$

a. Với $m = \sqrt{3}$, ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \mathrm{tg}x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy với $m = \sqrt{3}$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Từ (I) ta có ngay nhận xét phương trình (1) có nghiệm với mọi m.

c. Vì $x_1 + x_2 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, do đó có thể coi:

- x_1 là nghiệm của phương trình $\sin x = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}x_1 = 0$.
- x_2 là nghiệm của phương trình $\mathrm{tg}x = m \Rightarrow \mathrm{tg}x_2 = m$.

Suy ra: $\cos 2(x_1 + x_2) = \cos 2x_1.\cos 2x_2 - \sin 2x_1.\sin 2x_2$

$$= \frac{1 - \mathrm{tg}^2 x_1}{1 + \mathrm{tg}^2 x_1}.\frac{1 - \mathrm{tg}^2 x_2}{1 + \mathrm{tg}^2 x_2} - \frac{2\mathrm{tg}x_1}{1 + \mathrm{tg}^2 x_1}.\frac{2\mathrm{tg}x_2}{1 + \mathrm{tg}^2 x_2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

Cách 2: Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos x \neq 0$, ta được

$$m\mathrm{tg}x + 1 = 1 + \mathrm{tg}^2 x \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 x - m\mathrm{tg}x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = 0 \\ \mathrm{tg}x = m \end{array}\right. . \quad \text{(II)}$$

a. Với $m = \sqrt{3}$, ta được: $\text{(I)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = 0 \\ \mathrm{tg}x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Vậy với $m = \sqrt{3}$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Từ (1) ta có ngay nhận xét phương trình (1) có nghiệm với mọi m.

c. Vì $x_1 + x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, do đó có thể coi:

- x_1 là nghiệm của phương trình $tgx = 0 \Rightarrow tgx_1 = 0$.
- x_2 là nghiệm của phương trình $tgx = m \Rightarrow tgx_2 = m$.

Suy ra: $\cos2(x_1 + x_2) = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a. $4\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin2x - 2\cos^2x = 4$. b. $2\sin^2x + 3\cos^2x = 5\sin x.\cos x$.

Bài tập 2. Giải các phương trình:

a. $\sin^2x - 3\sin x.\cos x = 1$. b. $4\sin x + 6\cos x = \frac{1}{\cos x}$.

Bài tập 3. Cho phương trình: $3\sin^2x + m.\sin2x + 4\cos^2x = 0$.

a. Giải phương trình khi $m = -4$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 4. Cho phương trình: $(m + 1)\sin^2x - 2\sin x.\cos x + \cos2x = 0$.

a. Giải phương trình khi $m = 0$.

b. Xác định m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 5. Cho phương trình: $2\sin^2x + (5m - 2)\sin2x - 3(m + 1)\cos^2x = 3m$.

a. Giải phương trình khi $m = \frac{2}{3}$.

b. Xác định m để phương trình có đúng ba nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Bài tập 6. Cho phương trình: $m\sin x + (m + 1)\cos x = \frac{m}{\cos x}$.

a. Giải phương trình khi $m = \frac{1}{2}$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

c. Giả sử m là giá trị làm cho phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $x_1 + x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Tính $\cos2(x_1 + x_2)$ theo m.

Bài tập 7. Giải và biện luận phương trình: $\cos^2x + 8\sin x.\cos x + 7\sin^2x = m$

Bài tập 8. Giải và biện luận phương trình: $(m^2 + 2)\cos^2x - 2m.\sin2x + 1 = 0$.

Bài toán 4: Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx có dạng:

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0 \quad (1)$$

$$\text{hoặc } a(\sin x - \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0. \quad (2)$$

Để giải phương trình (1) ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$at + b\frac{t^2 - 1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow bt^2 + 2at + 2c - b = 0. \quad (2)$$

Bước 2. Giải (2) theo t và chọn nghiệm t_0 thoả mãn điều kiện $|t| < \sqrt{2}$

Với $t = t_0$, ta được:

$$\sin x + \cos x = t_0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = t_0 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{t_0}{\sqrt{2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của hàm số sin.

Chú ý:

1. Ta có thể giải (1) bằng cách đặt ẩn phụ $z = \frac{\pi}{4} - x$, khi đó ta có:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{2}\cos z$$

$$\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{4} - z) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2} - 2z)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2z = \frac{1}{2}(2\cos^2 z - 1)$$

Khi đó, phương trình ban đầu được đưa về dạng phương trình bậc 2 đối với cosz.

2. Phương trình (2) được giải tương tự như (1) với ẩn phụ

$$t = \sin x - \cos x, \text{ điều kiện } |t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{1 - t^2}{2}.$$

Ví dụ 1: Giải phương trình: $6(\sin x - \cos x) + \sin x\cos x + 6 = 0$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt $\sin x - \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$6t + \frac{1 - t^2}{2} + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 12t - 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 13 \text{ (l)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x - \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Đặt $z = \frac{\pi}{4} - x$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$6\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}\sin 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow 12\sqrt{2}\sin(-z) + \sin 2(\frac{\pi}{4} - z) + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -12\sqrt{2}\sin z + \sin(\frac{\pi}{2} - 2z) + 12 = 0 \Leftrightarrow -12\sqrt{2}\sin z + \cos 2z + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -12\sqrt{2}\sin z + (1 - 2\sin^2 z) + 12 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 z - 12\sqrt{2}\sin z + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin z = -\frac{13\sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \\ \sin z = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} - x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2: Cho phương trình

$$m(\sin x + \cos x) + \sin 2x + m - 1 = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 2.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$mt + (t^2 - 1) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + mt + m - 2 = 0. \quad (2)$$

a. Với m = 2 phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \text{ (l)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, với m = 2 phương trình có một họ nghiệm.

b. Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \text{(2) có nghiệm thoả mãn } |t| \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có 1 nghiệm thuộc } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ \text{(2) có 2 nghiệm thuộc } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-\sqrt{2}).f(\sqrt{2}) \le 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(\sqrt{2}) \ge 0 \\ af(-\sqrt{2}) \ge 0 \\ -\sqrt{2} \le \dfrac{S}{2} \le \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (-m\sqrt{2} + m).(m\sqrt{2} + m) \le 0 \\ \begin{cases} m^2 - 4m + 8 \ge 0 \\ m\sqrt{2} + m \ge 0 \\ -m\sqrt{2} + m \ge 0 \\ -\sqrt{2} \le -\dfrac{m}{2} \le \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \forall m.$$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Chú ý: Tồn tại những phương trình ở dạng ban đầu chưa phải là phương trình đối xứng, khi đó cần thực hiện một vài phép biến đổi lượng giác thích hợp.

Ví dụ 3: (ĐHMĐC – 1999): Giải phương trình: $1 + tgx = 2\sqrt{2}\sin x$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x.\cos x$$

Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng: $t = \sqrt{2}(t^2 - 1) \Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ t = \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{1}{2} \\ \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. $3(\sin x + \cos x) - 4\sin x\cos x = 0$. b. $12(\sin x - \cos x) - 2\sin x\cos x - 12 = 0$.

c. $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$. b. $|\sin x + \cos x| - \sin 2x = 0$.

Bài tập 3. Tìm m để phương trình: $3(\sin x + \cos x) = 4m\sin x.\cos x$ có nghiệm thuộc $(0, \frac{3\pi}{4})$.

Bài tập 4. Cho phương trình: $(1 - \cos x)(1 - \sin x) = m$

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Bài tập 5. Cho phương trình: $m(\sin x + \cos x) + \sin x\cos x + 1 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = -\sqrt{2}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

c. Tìm m để phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

Bài tập 6. Cho phương trình: $m(\sin x + \cos x) + \sin 2x = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình vô nghiệm.

c. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Bài tập 7. Giải và biện luận theo k phương trình : $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = k$.

Bài tập 8. Cho phương trình: $m(\sin x - \cos x) + 2\sin x\cos x = m$.

a. Giải phương trình với $m = 1 + \sqrt{2}$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Bài tập 9. Cho phương trình: $m + \sin^3x + \cos^3x - 3\sin x\cos x = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

c. Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Bài tập 10. Cho phương trình: $\sin x - \cos x + m\sin x\cos x = 1$.

a. Giải phương trình với $m = 7$.

b. Giải và biện luận phương trình theo m.

Bài tập 11. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$.

Bài toán 5: Loại nghiệm không thích hợp của phương trình lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường gặp 2 dạng toán sau:

Dạng 1: Tìm nghiệm thuộc (a, b) của phương trình.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Giải phương trình để tìm nghiệm $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

Bước 3: Tìm nghiệm thuộc (a, b):

$$a < \alpha + \frac{2k\pi}{n} < b \overset{k,n\in Z}{\Leftrightarrow} (k_0, l_0) \Rightarrow x_0 = \alpha + \frac{2k_0\pi}{n_0}.$$

Dạng 2: Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình $x \neq \beta + \frac{2l\pi}{n}$, $l, n \in \mathbb{Z}$

Bước 2: Giải phương trình để tìm nghiệm $x_0 = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, $k, n \in \mathbb{Z}$

Bước 3: Kiểm tra điều kiện ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp đại số:

- Nghiệm x_0 bị loại khi và chỉ khi:

$$\alpha + \frac{2k\pi}{n} = \beta + \frac{2l\pi}{n}.$$

- Nghiệm x_0 chấp nhận được khi và chỉ khi:

$$\alpha + \frac{2k\pi}{n} \neq \beta + \frac{2l\pi}{n}.$$

Phương pháp hình học:

- Biểu diễn các điểm $x = \beta + \frac{2l\pi}{n}$, $l, n \in \mathbb{Z}$ trên đường tròn đơn vị, khi đó ta được tập các điểm $C = \{C_1, ..., C_p\}$.
- Biểu diễn các điểm $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, $k, n \in \mathbb{Z}$ trên đường tròn đơn vị, khi đó ta được tập các điểm $D = \{D_1, ..., D_q\}$.
- Lấy tập $E = D \backslash C = \{E_1, ..., E_r\}$, từ đó kết luận nghiệm của phương trình là:

$$x = E_1 + 2k\pi, ... \; x = E_r + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 1: Tìm các nghiệm thuộc $[0, 2\pi]$ của phương trình :

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3.$$

Giải

Điều kiện:

$$1 + 2\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \neq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x \neq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x \neq \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \cos 3x + \sin 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x \\ &= 4(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3(\cos x - \sin x) \\ &= (\cos x - \sin x)[4(1 + \cos x.\sin x) - 3] \\ &= (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x). \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$5(\sin x + \cos x - \sin x) = \cos 2x + 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 2\ (l) \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z \overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

Ví dụ 2: Tìm x thuộc đoạn [0, 14] nghiệm đúng phương trình:

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\cos^3 x - 3\cos x - 4(\cos 2x + 1) + 3\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vì $x \in [0, 14]$ nên: $0 \le \frac{\pi}{2} + k\pi \le 14 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le k \le \frac{14 - \frac{\pi}{2}}{\pi} \Leftrightarrow k = 0, 1, 2, 3.$

Vậy, phương trình có các nghiệm $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{2}$.

Ví dụ 3: (ĐHMĐC – 1997). Giải phương trình :

$$\frac{\sin 5x}{5\sin x} = 1.$$

Giải

Điều kiện:

$$\sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 5x = 5\sin x \Leftrightarrow \sin 5x - \sin x = 4\sin x \Leftrightarrow 2\cos 3x.\sin 2x = 4\sin x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 3x.\sin x.\cos x = 4\sin x \Leftrightarrow (\cos 3x.\cos x - 1)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x.\cos x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 3x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \text{vi phạm điều kiện vì } \sin x \ne 0.$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 4: (ĐH Huế Khối A – 1999): Giải phương trình:

$$\frac{\sin x.\cot g5x}{\cos 9x} = 1.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\sin 5x \neq 0\\ \cos 9x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x \neq l\pi\\ 9x \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{l\pi}{5}\\ x \neq \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{l\pi}{9}\end{cases}, l \in \mathbf{Z}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 5x.\sin x = \cos 9x.\sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 4x) = \frac{1}{2}(\sin 14x - \sin 4x) \Leftrightarrow \sin 14x = \sin 6x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}14x = 6x + 2k\pi\\ 14x = \pi - 6x + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k\pi}{4}\\ x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Kiểm tra điều kiện (*)

- Với $x = \dfrac{k\pi}{4}$, ta cần có:

$$\begin{cases}\dfrac{k\pi}{4} \neq \dfrac{l\pi}{5}\\ \dfrac{k\pi}{4} \neq \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{l\pi}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5k \neq 4l\\ 9k \neq 2 + 4l\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k = 4n + 1\\ k = 4n + 3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{(4n+1)\pi}{4}\\ x = \dfrac{(4n+3)\pi}{4}\end{array}\right., n \in \mathbf{Z}.$$

- Với $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}$, ta cần có:

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10} \neq \dfrac{l\pi}{5}\\ \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10} \neq \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{l\pi}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 + 2k \neq 4l\\ 18k \neq 1 + 20l\end{cases} \text{ luôn đúng} \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Nhận xét: Trong lời giải trên từ:

$$\begin{cases}5k \neq 4l & (1)\\ 9k \neq 2 + 4l & (2)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k = 4n + 1\\ k = 4n + 3\end{array}\right.$$

bởi từ (1) suy ra k không chia hết cho 4 và từ (2) suy ra k lẻ, do đó:

$$\left[\begin{array}{l}k = 4n + 1\\ k = 4n + 3\end{array}\right. \qquad (1)$$

rồi lại thực hiện phép thử (I) và (2).

Còn đối với: $\begin{cases}1 + 2k \neq 4l\\ 18k \neq 1 + 20l\end{cases}$ luôn đúng

xuất phát từ tính chẵn lẻ của hai vế.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{a^2}{1-tg^2x} = \dfrac{\sin^2x + a^2 - 2}{\cos 2x}$.

b. $\dfrac{1-\cos 4x}{2\sin 2x} = \dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4x}$.

c. (ĐHY Hà Nội – 1995): $6\sin x - 2\cos^3x = \dfrac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$.

d. (ĐHBK Hà Nội – 2000): $\dfrac{\sin^4x + \cos^4x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}(tgx + cotgx)$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$.

b. $\dfrac{1 + 2\sin^2x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x.\cos x - 1} = 1$.

c. $2(\sin 3x - \cos 3x) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$.

d. $\dfrac{\sin^3x + \cos^3x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$.

e. (ĐHQG – 1997): $2\sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$.

f. $\dfrac{\sin^4\dfrac{x}{2} + \cos^4\dfrac{x}{2}}{1-\sin x} - tg^2x.\sin x = \dfrac{1}{2}(1+\sin x) + tg^2x$.

g. $\dfrac{3(cotg2x + \cos 2x)}{cotg2x - \cos 2x} - 2\sin 2x = 2$.

h. (ĐHBK Hà Nội – 1998): $\dfrac{1}{tgx + cotg2x} = \dfrac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{cotgx - 1}$.

i. (ĐHGTVT TPHCM – 1998): $\dfrac{cotg^2x - tg^2x}{\cos 2x} = 16(1+\cos 4x)$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}\text{cotg}(x + \frac{\pi}{3}).\text{cotg}(\frac{\pi}{6} - x)$.

b. $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$.

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{3(\cos 2x + \cot g2x)}{\cot g2x - \cos 2x} - 2\sin 2x = 2$.

b. $3\text{tg}3x + \text{cotg}2x = 2\text{tg}x + \frac{2}{\sin 4x}$.

c. $6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$.

d. $\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} = 0$

Bài tập 5. Tìm các nghiệm của phương trình

$$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 1 - \sin x$$

thoả mãn điều kiện $\left|\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right| \le \frac{3\pi}{4}$.

Bài tập 6. Tìm các nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0$$

thoả mãn điều kiện $|x| < 2$.

Bài tập 7. Tìm các nghiệm của phương trình

$$\frac{3\pi}{4}\sin(2x + \frac{5\pi}{2}) - 3\cos(x - \frac{7\pi}{2}) = 1 + 2\sin x$$

thoả mãn điều kiện $x \in (\frac{\pi}{2}, 3\pi)$.

Bài tập 8. Tìm tổng các nghiệm thoả mãn $1 \le x \le \pi$ của phương trình:

$$\cos 2x - \text{tg}^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}.$$

CHỦ ĐỀ 3

NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Các phương trình lượng giác rất đa dạng không thể có một công thức chung nào để giải mọi phương trình lượng giác, bởi vậy cần thiết sử dụng các phép biến đổi lượng giác thông thường để đưa phương trình ban đầu về các dạng cơ bản. Chúng ta đưa ra một nguyên tắc chung thường dùng khi giải phương trình lượng giác.

Thông thường phải thực hiện các việc sau:

- Nếu phương trình chứa nhiều hàm lượng giác khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa một hàm.
- Nếu phương trình chứa các hàm lượng giác của nhiều cung khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa các hàm lượng giác của một cung.

Sau khi biến đổi như trên nếu phương trình nhận được không có dạng quen thuộc thì có thể đi theo hai hướng:

Hướng thứ nhất:

Biến đổi phương trình đã cho để đưa về việc giải các phương trình đơn giản quen thuộc. Các phương pháp biến đổi theo hướng này gồm có:

Phương pháp đặt ẩn phụ

Để đưa phương trình về việc giải một phương trình đại số.

Thí dụ: Giải phương trình : $2\cos^2 x = \sin x + 1$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng: $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Đặt $t = \sin x$ điều kiện $|t| \le 1$, ta được

$$2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -1/2 \end{array}\right.$$

Phương pháp hạ bậc

Nếu phương trình cần giải có bậc cao thì dùng công thức hạ bậc để biến đổi về bậc thấp hơn.

Thí dụ: Giải phương trình: $\sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x = 0$.

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos 6x}{2} - \sin^2 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow (\cos 6x - \cos 2x) + 2\sin^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 4x.\sin 2x + 2\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x(\sin 4x - \sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin 2x.\cos 3x.\sin x = 0.$$

Phương pháp biến đổi thành phương trình tích

Thí dụ: Giải phương trình

$$\sin 2x + \sin 4x = 2\cos x$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin 3x.\cos x = 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos x(\sin 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin 3x = 1\end{array}\right..$$

Phương pháp tổng các số hạng không âm

Thí dụ: Giải phương trình

$$2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 3tg^2 2x - 2\sqrt{3}\,tg2x + 2 = 0$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sqrt{2}\sin x - 1)^2 + (\sqrt{3}\,tg2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ tg2x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}.$$

Phương pháp đánh giá dùng để giải các phương trình không mẫu mực.

. ***Thí dụ:*** Giải phương trình : $\cos x.\cos 2005x = 1$.

Lời giải

Ta có $|\cos x| \le 1$ và $|\cos 2005x| \le 1$.

Suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos x = -1\ \&\ \cos 2005x = -1\\ \cos x = 1\ \&\ \cos 2005x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Phương pháp hàm số : sử dụng các tính chất của hàm số để giải phương trình.

Thí dụ: Giải phương trình: $2^{\cos x} - 2^{\sin x} = \sin x - \cos x$.

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$2^{\cos x} + \cos x = 2^{\sin x} + \sin x$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ đồng biến trên R.

Vậy, phương trình được viết dưới dạng:

$$f(\cos x) = f(\sin x) \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in Z.$$

Hướng thứ hai:

Dùng lập luận khẳng định phương trình cần giải là vô nghiệm.

Thí dụ: Giải phương trình

$$\sin 2x - \cos 2x = tgx + cotgx \qquad (1)$$

Lời giải

- Vế trái của (1) ta có $|\sin 2x - \cos 2x| \le \sqrt{2}$.
- Vế phải của (1) ta có $|tgx + cotgx| \ge 2$.

Vậy, phương trình (1) là vô nghiệm.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài toán 1: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta thực chất đã làm quen với phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình lượng giác trong các chủ đề

- Phương trình bậc 2 và bậc cao đối với một hàm số lượng giác.
- Phương trình đẳng cấp bậc 2 và bậc cao đối với sin và cos.
- Phương trình đối xứng.

Trong bài toán này chúng ta xét thêm những trường hợp khác, bao gồm:

1. Mọi phương trình lượng giác đều có thể thực hiện việc đại số hoá thông qua hàm tg, cụ thể nếu đặt t = tgx thì:

$$\text{cotgx} = \frac{1}{t},$$

$$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \text{tg}2x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

2. Đặt $t = \frac{1}{\sin x}$ hoặc $t = \frac{1}{\cos x}$, điều kiện $|t| \geq 1$.

3. Đặt $t = a.\sin x + b.\cos x$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{a^2+b^2}$.

Ví dụ 1: (ĐHY Hà Nội – 2000): Giải phương trình:

$$\sin 4x = \text{tgx}.$$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt t = tgx, suy ra phương trình có dạng:

$$2\sin 2x.\cos 2x = \text{tgx} \Leftrightarrow 2.\frac{2t}{1+t^2}.\frac{1-t^2}{1+t^2} = t \Leftrightarrow 4t(1-t^2) = t(1+t^2)^2$$

$$\Leftrightarrow t(t^4+6t^2-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t^2 = -3 \pm \sqrt{12} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tgx} = 0 \\ \text{tg}^2x = \sqrt{12} - 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tgx} = 0 \\ \text{tgx} = \pm\sqrt{\sqrt{12}-3} = \pm\text{tg}\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\alpha + k\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Cách 2: Sử dụng phương pháp phân tích

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 4x = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x.\cos x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos x.\cos 2x.\cos x = \sin x \Leftrightarrow (4\cos^2 x.\cos 2x - 1)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow [2(1 + \cos 2x).\cos 2x - 1]\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} = \cos 2\alpha \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ 2x = \pm 2\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\alpha + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\cot g x = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x$.

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$$

Cách 1: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt $t = \operatorname{tg} x$, suy ra $\cot g x = \dfrac{1}{t}$ và $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2t}{1 - t^2}$.

Khi đó, phương trình có dạng: $\dfrac{1}{t} = t + \dfrac{4t}{1 - t^2} \Leftrightarrow 1 - t^2 = t^2(1 - t^2) + 4t^2$

$$\Leftrightarrow t^4 - 6t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)^2 = 4t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 - 1 = 2t \\ t^2 - 1 = -2t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 - 2t - 1 = 0 \\ t^2 + 2t - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \pm \sqrt{2} \\ t = -1 \pm \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{2} = \operatorname{tg}\alpha_1 \\ \operatorname{tg} x = 1 + \sqrt{2} = \operatorname{tg}\alpha_2 \\ \operatorname{tg} x = -1 - \sqrt{2} = \operatorname{tg}\alpha_3 \\ \operatorname{tg} x = -1 + \sqrt{2} = \operatorname{tg}\alpha_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha_1 + k\pi \\ x = \alpha_2 + k\pi \\ x = \alpha_3 + k\pi \\ x = \alpha_4 + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có bốn họ nghiệm.

Cách 2: Sử dụng phương pháp luận hệ số để phân tích

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cot g x - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos x.\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x)\cos x = \sin 3x.\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x.\cos x - \sin 3x.\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 3: Cho phương trình: $4\text{tg}^2x + \frac{4m}{\cos x} + 5 = 0.$ (1)

a. Giải phương trình với $m = -1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$4\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) + \frac{4m}{\cos x} + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{4m}{\cos x} + 1 = 0$$

Đặt $t = \frac{2}{\cos x}$, điều kiện $|t| \geq 2$, khi đó phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + 2mt + 1 = 0. \quad (2)$$

a. Với $m = -1$, ta được: $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (loại).

Vậy, với $m = -1$ phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình (1) có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $t \geq 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có nghiệm } t_1 \leq 2 \leq t_2 \\ \text{(2) có nghiệm } 2 \leq t_1 \leq t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(2) \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(2) \geq 0 \\ S/2 \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m + 5 < 0 \\ \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ 4m + 5 \geq 0 \\ -m \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{4}$$

Vậy, với $m \leq -\frac{5}{4}$ phương trình đã cho có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ví dụ 4: Cho phương trình:

$$(m + 1)\text{tg}^4x - 3m(1 + \text{tg}^2x)\text{tg}^2x + \frac{4m}{\cos^4 x} = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{9}{37}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm khác $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giải

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m + 1)\text{tg}^4x - 3m(1 + \text{tg}^2x)\text{tg}^2x + 4m(1 + \text{tg}^2x)^2 = 0.$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $(1 + tg^2x)^2 \neq 0$, ta được:

$$(m + 1).\left(\frac{tg^2x}{1 + tg^2x}\right)^2 - 3m.\frac{tg^2x}{1 + tg^2x} + 4m = 0.$$

Đặt $t = \frac{tg^2x}{1 + tg^2x}$, điều kiện $0 \le t < 1$, khi đó phương trình có dạng:

$$(m + 1)t^2 - 3mt + 4m = 0 \qquad (2)$$

a. Với $m = -\frac{9}{37}$, ta được:

$$28t^2 + 27t - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{4} \\ t = -\frac{12}{7} \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{tg^2x}{1 + tg^2x} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow tg^2x = 3 \Leftrightarrow tgx = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Xét hai trường hợp

Trường hợp 1. Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, ta được:

$(2) \Leftrightarrow 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$ loại $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Phương trình (1) có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in (0, 1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có một nghiệm thuộc } (0,1) \\ \text{(2) có hai nghiệm thuộc } (0,1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0).f(1) < 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(0) > 0 \\ af(1) > 0 \\ 0 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

Vậy, với $m > -\frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $1 + 3\sin2x = 2tgx$.

b. $1 + 3tgx = 2\sin2x$.

c. $6tgx = tg2x$.

d. $\sin2x + 2tgx = 3$.

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $\cos x + tg\frac{x}{2} = 1$.

b. $2 + \cos x = 2tg\frac{x}{2}$.

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $(1 - tgx)(1 + \sin2x) = 1 + tgx$.

b. $4\sin^2 x + 3\mathrm{tg}^2 x = 1$.

c. $3\sin x + \cos x - 4\mathrm{cotg}\dfrac{x}{2} + 1 = 0$

d. (ĐHY Hà Nội – 1996): $(\cos x - \sin x)\cos x.\sin x = \cos x.\cos 2x$.

Bài tập 4: Cho phương trình:

$$\mathrm{cotg}^2 x + \frac{m}{\sin x} + 2m - 1 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6})$.

Bài tập 5: Cho phương trình:

$$4\mathrm{tg}^2 x - 2m(1 + \mathrm{tg}^2 x)\mathrm{tg}x + \frac{4}{\cos^4 x} = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = -5$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 6: Cho phương trình:

$$(1 - a)\mathrm{tg}^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0$$

a. Giải phương trình khi $a = 1/2$.

b. Xác định a để phương trình có nhiều hơn 1 nghiệm trong khoảng $(0, \dfrac{\pi}{2})$.

Bài tập 7: Cho phương trình:

$$\frac{4}{\cos^2 x} + \cos^2 x + m(\frac{2}{\cos x} + \cos x) - 3 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = -\dfrac{2}{3}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(0, \dfrac{\pi}{2})$.

Bài tập 8: Cho phương trình:

$$3\cos x + 4\sin x + \frac{6}{3\cos x + 4\sin x + 1} = m.$$

a. Giải phương trình với $m = 6$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(0, \pi)$.

Bài toán 2: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đổi biến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng biến t để chuyển phương trình ban đầu về phương trình chứa các cung t, 2t, 3t, ..., kt, rồi sử dụng các công thức góc nhân đôi, nhân ba ...

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 5\sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos 3x.$$

Giải

Đặt $t = x - \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 2t$ và $3x = 3t + \frac{\pi}{2}$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sin 2t = 5\sin t + \cos(3t + \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \sin 2t = 5\sin t - \sin 3t$$

$$\Leftrightarrow \sin 3t + \sin 2t = 5\sin t \Leftrightarrow 3\sin t - 4\sin^3 t + 2\sin t.\cos t = 5\sin t$$

$$\Leftrightarrow (3 - 4\sin^2 t + 2\cos t - 5)\sin t = 0 \Leftrightarrow (2\sin^2 t - \cos t + 1)\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow [2(1 - \cos^2 t) - \cos t + 1]\sin t = 0 \Leftrightarrow (2\cos^2 t + \cos t - 3)\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \cos t = 1 \\ \cos t = -3/2 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $32\cos^6(x + \frac{\pi}{4}) - \sin 6x = 1$.

Giải

Đặt $t = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 6x = 6t - \frac{3\pi}{2}$.

Khi đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$32\cos^6 t - \sin(6t - \frac{3\pi}{2}) = 1 \Leftrightarrow 32\left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^3 - \cos 6t = 1$$

$$\Leftrightarrow 4(1 + 3\cos 2t + 3\cos^2 2t + \cos^3 2t) - (4\cos^3 2t - 3\cos 2t) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2t + 5\cos 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2t = -1 \\ \cos 2t = -\frac{1}{4} = \cos 2\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = \pi + 2k\pi \\ 2t = \pm 2\alpha + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ t = \alpha + k\pi \\ t = -\alpha + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \alpha + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\alpha + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\alpha - \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.,\ k \in Z.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 3: (HVCNBCVT – 1999): Giải phương trình:

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \sin 2x.\sin(x + \frac{\pi}{4}).$$

Giải

Đặt $t = x + \frac{\pi}{4}$ suy ra: $\begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = 3t - \pi \\ 2x = 2t - \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sin(3t - \pi) = \sin(2t - \frac{\pi}{2}).\sin t \Leftrightarrow -\sin 3t = -\cos 2t.\sin t$$

$$\Leftrightarrow 3\sin t - 4\sin^3 t = (1 - 2\sin^2 t)\sin t \Leftrightarrow \sin^3 t - \sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 t - 1)\sin t = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t.\sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t.\sin 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2t = 0 \Leftrightarrow 2t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 4: (ĐHTL – 2001): Giải phương trình: $\sin(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2})$.

Giải

Đặt $t = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} \Rightarrow \pi - 3t = \frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sin t = \frac{1}{2}\sin(\pi - 3t) \Leftrightarrow 2\sin t = \sin 3t \Leftrightarrow 2\sin t = 3\sin t - 4\sin^3 t$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 t - \sin t = 0 \Leftrightarrow (4\sin^2 t - 1)\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow [2(1 - \cos 2t) - 1]\sin t = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\cos 2t)\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \cos 2t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ 2t = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ t = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} = k\pi \\ \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{5} - 2k\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} - 2k\pi \\ x = \frac{14\pi}{5} - 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 5: (ĐHQG Hà Nội – 1999): Giải phương trình: $8\cos^3(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 3x$.

Giải

Đặt $t = x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 3x = 3t - \pi$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$8\cos^3 t = \cos(3t - \pi) \Leftrightarrow 8\cos^3 t = -\cos 3t$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 t = -(4\cos^3 t - 3\cos t) \Leftrightarrow 4\cos^3 t - \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^2 t - 1)\cos t = 0 \Leftrightarrow [2(1 + \cos 2t) - 1]\cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2\cos 2t)\cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 0 \\ \cos 2t = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ t = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \subset \mathbf{Z}$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $2\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \sin 3x - \cos 3x$.

Giải

Đặt $t = x + \frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x = 3t - \frac{\pi}{2}$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$2\cos t = \sin(3t - \frac{\pi}{2}) - \cos(3t - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow 2\cos t = -\cos 3t - \sin 3t$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t = -(4\cos^3 t - 3\cos t) - (3\sin t - 4\sin^3 t)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - \cos t + 3\sin t - 4\sin^3 t = 0. \qquad (1)$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

  Khi đó phương trình có dạng : $3\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) - 4\sin^3(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$, vô lí.

Vậy phương trình không nhận $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 t \neq 0$, ta được

$$4 - (1 + tg^2 t) + 3(1 + tg^2 t).tgt - 4tg^3 t = 0$$

$$\Leftrightarrow tg^3t + tg^2t - 3tgt - 3 = 0 \Leftrightarrow (tgt + 1)(tg^2t - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgt = -1 \\ tgt = \sqrt{3} \\ tgt = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ t = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ t = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x = 2\cos(\frac{\pi}{6} - x)$. b. $\cos 3x = 2\sin(x + \frac{5\pi}{6})$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 3\sin(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2})$. b. $\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 3\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $\cos 9x + 2\cos(6x + \frac{2\pi}{3}) + 2 = 0$. b. $2\cos\frac{6x}{5} + 1 = 3\cos\frac{8x}{5}$.

Bài toán 3: Giải phương trình lượng giác sử dụng công thức hạ bậc.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Thực hiện việc hạ bậc của phương trình bằng các công thức:

Hạ bậc đơn:

1. $\sin^2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ 5. $\sin^3x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

2. $\cos^2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ 6. $\cos^3x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

3. $tg^2x = \dfrac{\sin^2x}{\cos^2x} = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ 7. $tg^3x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{3\cos x + \cos 3x}$

4. $cotg^2x = \dfrac{\cos^2x}{\sin^2x} = \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$ 8. $cotg^3x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{3\sin x - \sin 3x}$

Ngoài ra còn có:

$$\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Hạ bậc toàn cục: Chúng ta đã được biết trong dạng phương trình hỗn hợp chứa $\sin^n x$ và $\cos^n x$.

Hạ bậc đối xứng: Giả sử cần biến đổi biểu thức dạng:

$$A = \sin^3 x.\cos 3x + \cos^3 x.\sin 3x$$

ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$A = \sin^2 x.\sin x.\cos 3x + \cos^2 x.\cos x.\sin 3x$$
$$= (1 - \cos^2 x).\sin x.\cos 3x + (1 - \sin^2 x).\cos x.\sin 3x$$
$$= \sin x.\cos 3x + \cos x.\sin 3x - (\cos x.\cos 3x + \sin x.\sin 3x)\sin x.\cos x$$
$$= \sin 4x - \frac{1}{2}\cos 2x.\sin 2x = \sin 4x - \frac{1}{4}\sin 4x = \frac{3}{4}\sin 4x.$$

Cách 2: Ta có:

$$A = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\cos 3x + \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\sin 3x$$
$$= \frac{3}{4}(\sin x.\cos 3x + \cos x.\sin 3x) = \frac{3}{4}\sin 4x.$$

Ví dụ 1: (Đề 48): Giải phương trình: $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \sin(10x + \frac{17\pi}{2})$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 + \cos 16x}{2} = \sin(10x + \frac{\pi}{2} + 8\pi)$$

$\Leftrightarrow 2\cos 10x + \cos 16x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 10x + 2\cos 10x.\cos 6x = 0$

$\Leftrightarrow (\cos 6x + 1)\cos 10x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 6x = -1 \\ \cos 10x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = \pi + 2k\pi \\ 10x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có 2 họ nghiệm.

Chú ý: Với những phương trình chứa số lẻ các nhân tử bậc cao (giả sử bằng 3), thông thường ta không đi hạ bậc tất cả các nhân tử đó mà chỉ chọn ra 2 nhân tử để hạ bậc. Cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: (ĐHQG Hà Nội – 1998): Giải phương trình:

$$\sin^2 x = \cos^2 2x + \cos^2 3x.$$

Giải

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1 + \cos 4x}{2} + \cos^2 3x \Leftrightarrow 2\cos^2 3x + (\cos 4x + \cos 2x) = 0$$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 3x + 2\cos 3x.\cos x = 0 \Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x)\cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x.\cos 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 3: (Đề 52): Giải phương trình: $\cos^2 x = \cos\dfrac{4x}{3}$.

Giải

Ta có: $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \dfrac{1}{2}[1 + \cos(3.\dfrac{2x}{3})]$.

Đặt $t = \dfrac{2x}{3}$, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 3t) = \cos 2t \Leftrightarrow 1 + 4\cos^3 t + 3\cos t = 2(2\cos^2 t - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 4\cos^2 t - 3\cos t + 3 = 0 \Leftrightarrow (\cos t - 1)(4\cos^2 t - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 1 \\ 4\cos^2 t - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 1 \\ 2(1 + \cos 2t) - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 1 \\ \cos 2t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x}{3} = 2k\pi \\ 2.\dfrac{2x}{3} = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Chú ý: Với các nhân tử bậc cao hơn 3, ta cần hạ bậc dần. Cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: **(ĐHHH – 1995)**: Giải phương trình:

$$\sin^4 x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 + \frac{1}{4}[1 + \cos(2x + \frac{\pi}{2})]^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + (1 - \sin 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 5: (HVQHQT – 1998). Giải phương trình:

$$\cos^2x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}.$$

Giải

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$1 + \cos2x + 1 + \cos4x + 1 + \cos6x + 2\cos^2 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow \cos2x + \cos4x + \cos6x + 2\cos^2 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos4x.\cos2x + \cos4x + 2\cos^2 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos4x(2\cos2x + 1 + 2\cos4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos4x(4\cos^2 2x + 2\cos2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 4x = 0 & (1) \\ 4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$$

Giải (2): Đặt $t = \cos2x$, điều kiện $|t| \le 1$, ta được:

$$4t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

- Với $t_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, ta được: $\cos2x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos2\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- Với $t_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$, ta được: $\cos2x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} = \cos2\beta \Leftrightarrow x = \pm\beta + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Vậy, phương trình có 5 họ nghiệm.

Ví dụ 6: (HVCNBCVT – 2001): Giải phương trình:

$$4\sin^3x.\cos3x + 4\cos^3x.\sin3x + 3\sqrt{3}\cos4x = 3 \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$4\sin^3x.\cos3x + 4\cos^3x.\sin3x = (3\sin x - \sin3x).\cos3x + (\cos3x + 3\cos x)\sin3x$$

$$= 3(\sin3x.\cos x + \cos3x.\sin x) = 3\sin4x.$$

Do đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$3\sin4x + 3\sqrt{3}\cos4x = 3 \Leftrightarrow \sin4x + \sqrt{3}\cos4x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(4x + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 4x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 7: (Đề 15): Giải phương trình: $1 + 2\cos^2\frac{3x}{5} = 3\cos\frac{4x}{5}$.

Giải

Ta có:

$$\cos^2\frac{3x}{5} = \frac{1}{2}(1 + \cos\frac{6x}{5}) = \frac{1}{2}[1 + \cos(3.\frac{2x}{5}].$$

Đặt $t = \frac{2x}{5}$, phương trình được biến đổi về dạng:

$$1 + 1 + \cos3t = 3\cos2t \Leftrightarrow 2 + 4\cos^3t + 3\cos t = 3(2\cos^2t - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3t - 6\cos^2t - 3\cos t + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos t - 1)(4\cos^2t - 2\cos t - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 1 \\ \cos t = \frac{1 - \sqrt{21}}{4} = \cos\alpha \\ \cos t = \frac{1 + \sqrt{21}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2x}{5} = 2k\pi \\ \frac{2x}{5} = \pm\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5k\pi \\ x = \pm\frac{5\alpha}{2} + 5k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 8: (ĐHGTVT – 2001): Giải phương trình:

$$\sin^4x + \sin^4(x + \frac{\pi}{4}) + \sin^4(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{9}{8}.$$

Giải

Biến đổi vế trái của phương trình về dạng:

$$VT = \sin^4x + \sin^4(x + \frac{\pi}{4}) + \sin^4(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})$$

$$= \sin^4x + \sin^4(x + \frac{\pi}{4}) + \cos^4(x + \frac{\pi}{4})$$

$$= \left(\frac{1 - \cos2x}{2}\right)^2 + \left[\sin^2(x + \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x + \frac{\pi}{4})\right]^2 - 2\sin^2(x + \frac{\pi}{4})\cos^2(x + \frac{\pi}{4})$$

$$= \left(\frac{1 - \cos2x}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x + \frac{\pi}{2})$$

$$= \left(\frac{1 - \cos2x}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{2}\cos^22x = -\frac{1}{4}(\cos^22x + 2\cos2x - 5).$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$-\frac{1}{4}(\cos^22x + 2\cos2x - 5) = \frac{9}{8} \Leftrightarrow 2\cos^22x + 4\cos2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2} \Rightarrow \cos 2x = \frac{-2+\sqrt{6}}{2} = \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 9: Giải phương trình:

$$1 + \sin x.\sin\frac{x}{2} - \sin^2 x.\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1 + \sin x.\sin\frac{x}{2} - \sin^2 x.\cos\frac{x}{2} = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\sin\frac{x}{2} - \sin^2 x.\cos\frac{x}{2} = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (1) \\ \sin\frac{x}{2} - \sin x.\cos\frac{x}{2} = 1 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Giải (2): Ta được:

$$\sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} - 2\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^3\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sin\frac{x}{2} - 1\right)\left(2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) ta được $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin\left(10x + \frac{21\pi}{2}\right)$.

b. (ĐHKTQD Hà Nội – 1999): $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$.

c. (ĐH Huế – 1998): $\sin^2 3x + \sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{2}$.

d. (ĐHY - 1998): $\sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x = 0$.

e. (ĐH Việt Nam Khối B – 2002): $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. (Đề 135): $\sin^3 x.\sin 3x + \cos^3 x.\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

b. (Đề 142): $\sin^3x.\sin3x + \cos^3x.\cos3x = \cos^3 4x$.

c. (ĐHNN – 2001): $\cos^3x.\cos3x - \sin3x.\sin^3x = \cos^3 4x + \frac{1}{4}$.

d. (ĐHLN – 1997): $\sin^3 2x.\cos6x + \sin6x.\cos^3 2x = \frac{3}{8}$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $32\cos^6x = 1 + \cos6x$. b. $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \sin(\frac{17\pi}{2} + 10x)$.

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. $\cos^3x.\cos3x + \sin^3x.\sin3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

b. $\cos^3 4x = \cos3x.\cos^3x + \sin^3x.\sin3x$.

Bài tập 5. Giải các phương trình sau:

a. $\sin^8x + \cos^8x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$. b. $\cos^4x - \cos2x + 2\sin^6x = 0$.

Bài tập 6. Giải các phương trình sau:

a. $\cos^4x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$.

b. $\frac{\sin^{10}x + \cos^{10}x}{4} = \frac{\sin^6x + \cos^6x}{4\sin^2 2x + \cos^2 2x}$.

Bài tập 7. (ĐHSP TPHCM – 2000): Giải phương trình:

$$2\cos^2x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x - 3 = (2\sin2x + 1)\cos4x.$$

Bài tập 8. (ĐHTDTT – 2001): Giải phương trình:

$$\cos3x + \sin7x = 2\sin^2(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 2\cos^2\frac{9x}{2}.$$

Bài tập 9. Cho phương trình: $\sin^2[(x + 1)y] = \sin^2(xy) + \sin^2[(x - 1)y]$.

Tìm nghiệm x, y của phương trình để $(x + 1)y$, xy, $(x - 1)y$ là số đo các góc của tam giác.

Bài tập 10. Xác định m để phương trình :

$$\sin^4x + \cos^4x + \frac{1}{4}m.\sin4x - (2m + 1)\sin^2x.\cos^2x = 0$$

có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 11. Xác định a để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin^6x + \cos^6x = a(\sin^4x + \cos^4x)$$

Bài tập 12. Cho phương trình: $\frac{\sin^6x + \cos^6x}{\cos^2x - \sin^2x} = 2m\text{tg}2x$

a. Giải phương trình khi $m = \frac{1}{8}$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 13. Tìm a để phương trình sau có nghiệm :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a\,|\sin 2x|$$

Bài tập 14. Giải và biện luận phương trình:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = m(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

Bài tập 15. Tìm tổng các nghiệm của phương trình:

$$2\cos^2 x + \text{cotg}^2 x = \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x}$$

thoả mãn $2 \le x \le 40$.

Bài toán 4: Giải phương trình lượng giác bằng việc biến đổi nó về dạng tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Việc biến đổi phương trình lượng giác về phương trình tích phụ thuộc vào các phép biến đổi dạng:

Dạng 1: Biến đổi tổng, hiệu thành tích.

Dạng 2: Biến đổi tích thành tổng.

Dạng 3: Lựa chọn phép biến đổi cho cos2x.

Dạng 4: Phương pháp luận hệ số.

Dạng 5: Phương pháp hằng số biến thiên.

Dạng 6: Phương pháp nhân.

Dạng 7: Sử dụng các phép biến đổi hỗn hợp.

Ta đưa phương trình cần giải về dạng tích:

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.,$$

trong đó các phương trình A = 0, B = 0 là các phương trình có dạng chuẩn.

Với các bài toán có tham số, để xác định điều ki0ện sao cho phương trình có đúng k nghiệm trên miền D, cần chú ý tới số nghiệm của mỗi phương trình thành phần.

Sau đây ta sẽ lần lượt xét từng dạng.

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TỔNG, HIỆU THÀNH TÍCH

Ví dụ 1: (ĐHLN TPHCM – 2001): Giải phương trình:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi tổng thành tích

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 + \cos 2x) + (\cos 3x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos 2x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \cos 2x).\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0\\ \cos x=0\\ \cos\frac{3x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos\frac{3x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi về phương trình chứa 1 hàm lượng giác

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1+\cos x+2\cos^2 x-1+4\cos^3 x-3\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x+2\cos^2 x-2\cos x=0 \Leftrightarrow (2\cos^2 x+\cos x-1)\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pi+2k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2: (HVQHQT – 1999): Giải phương trình:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\cos x+\cos 3x)+(\cos 2x+\cos 4x)=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x+2\cos 3x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x+\cos 3x).\cos x=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2}.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0\\ \cos x=0\\ \cos\frac{5x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+2k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 3: (ĐHNT TPHCM – 2000): Giải phương trình:

$$1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\sin 2x+\cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1-\cos 2x)+\sin x+(\cos 3x-\cos x)-\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x-2\sin 2x.\sin x-2\sin x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x+1-4\sin x.\cos x-2\cos x)\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(1-2\cos x)\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có năm họ nghiệm.

Ví dụ 4: (ĐHNT Hà Nội – 1998): Giải phương trình:

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x - \cos x) + (\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin^3 x - \cos^3 x) + (\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[1 + (\sin x + \cos x) + (1 + \sin x\cos x) + (\sin x + \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x\cos x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x - \cos x = 0 & (1) \\ 2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x.\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được: $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \text{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Giải (2): Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$2 + 2t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -3 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 5: (Đề 129): Giải và biện luận theo a, b phương trình:

$$\cos ax + \cos 2bx - \cos(a + 2b)x = 1.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 - \cos ax) + [\cos(a + 2b)x - \cos 2bx] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{ax}{2} - 2\sin(\frac{a}{2} + 2b)x.\sin\frac{ax}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin\frac{ax}{2} - \sin\left(\frac{a}{2} + 2b\right)x\right].\sin\frac{ax}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{a}{2} + b\right)x.\sin(-bx).\sin\frac{ax}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{a}{2} + b\right)x.\sin bx.\sin\frac{ax}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{a}{2} + b\right)x = 0 \\ \sin bx = 0 \\ \sin\frac{ax}{2} = 0 \end{array}\right. \qquad (I)$$

- Với $a = 0$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos bx = 0 \\ \sin bx = 0 \\ \sin 0.x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{phương trình nghiệm đúng với } \forall x \in \mathbf{R}.$$

- Với $b = 0$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{ax}{2} = 0 \\ \sin 0.x = 0 \\ \sin\frac{ax}{2} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{phương trình nghiệm đúng với } \forall x \in \mathbf{R}.$$

- Với $\frac{a}{2} + b = 0$ và $a, b \neq 0$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} bx = k\pi \\ \frac{ax}{2} = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{b} \\ x = \frac{2k\pi}{a} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

- Với $\frac{a}{2} + b \neq 0$ và $a, b \neq 0$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{a}{2} + b\right)x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ bx = k\pi \\ \frac{ax}{2} = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi + 2k\pi}{a + 2b} \\ x = \frac{k\pi}{b} \\ x = \frac{2k\pi}{a} \end{array}\right., k \in Z.$$

Ví dụ 6: Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thuộc $[0, 3\pi/4]$

$$\sin 2x + m = \sin x + 2m\cos x. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin x.\cos x + m = \sin x + 2m\cos x \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \in [0, \frac{3\pi}{4}] \\ \sin x = m \qquad (I) \end{array}\right..$$

Vậy, để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $[0, \frac{3\pi}{4}]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có đúng một nghiệm khác $\frac{\pi}{3}$ thuộc $[0, \frac{3\pi}{4}]$.

Nhận xét rằng phương trình sinx = m nếu có nghiệm $\alpha \in [0,\pi]$ thì cũng sẽ có nghiệm $\pi - \alpha \in [0,\pi]$, do đó điều kiện là phương trình sinx = m có nghiệm $x = \frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{\pi}{2}$ hoặc $x \in [0, \frac{\pi}{4})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \sin\frac{\pi}{3} \\ m = \sin\frac{\pi}{2} \\ 0 \le m < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ m = 1 \\ 0 \le m < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

LỰA CHỌN PHÉP BIẾN ĐỔI CHO COS2X

Ví dụ 1: (Đề 68): Giải phương trình: $2\cos^3x + \cos2x + \sin x = 0$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\cos^3x + 2\cos^2x - 1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2(\cos x + 1)\cos^2x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos x + 1)(1 - \sin^2x) + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)[2(\cos x + 1)(1 + \sin x) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)[1 + 2\sin x.\cos x + 2(\sin x + \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)[(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x + 2 = 0 \text{ vn} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét:

a. Trong lời giải trên sở dĩ chúng ta lựa chọn phép biến đổi:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

bởi 2 nhân tử còn lại là $2\cos^3 x$ (cos có hệ số 2) và sinx (sin có hệ số 1)

b. Như vậy trong trường hợp trái lại, ta sẽ lựa chọn phép biến đổi:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

Cụ thể, chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: (ĐHNN I – 1999): Giải phương trình:

$$2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin^3 x - 1 + 2\sin^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2(\sin x + 1)\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + 1)(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)[2(\sin x + 1)(1 + \cos x) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)[1 + 2\sin x.\cos x + 2(\sin x + \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)[(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x + 2 = 0 \ \text{vn} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy chúng ta đã có được phương pháp suy luận trong việc lựa chọn hai hướng biến đổi cho cos2x. Cuối cùng, trong trường hợp hệ số đối xứng ta sẽ lựa chọn phép biến đổi:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Cụ thể chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: (ĐHY Hà Nội – 2000): Giải phương trình:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x + \sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x = 0 & (1) \\ 1 - \sin x.\cos x + \sin x - \cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$\sin x = -\cos x \Leftrightarrow \text{tg}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Giải (2): Đặt sinx − cosx = t, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra sinx.cosx = $\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó (2) có dạng:

$$1 - \frac{1-t^2}{2} + t = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 4: (ĐHQG Hà Nội − 1995): Giải phương trình:

$$4\sin 2x - 3\cos 2x = 3(4\sin x - 1).$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\sin 2x - 3\cos 2x = 12\sin x - 3$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 2x - 3(1 - 2\sin^2 x) = 12\sin x - 3$$

$$\Leftrightarrow 8\sin x.\cos x + 6\sin^2 x = 12\sin x \Leftrightarrow 2(4\cos x + 3\sin x - 6)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 4\cos x + 3\sin x = 6 \text{ vô nghiệm} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 5: (ĐHTS − 1999): Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x \in (0, \frac{\pi}{4})$:

$$\sin^4 x + \cos 2x + m.\cos^6 x = 0. \quad (1)$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 - \cos^2 x)^2 + 2\cos^2 x - 1 + m.\cos^6 x = 0 \Leftrightarrow \cos^4 x + m.\cos^6 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + m.\cos^2 x).\cos^4 x = 0 \Leftrightarrow m.\cos^2 x = -1. \quad (2)$$

Vì $x \in (0, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \cos^2 x < 1$,

do đó để phương trình (1) có nghiệm $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ điều kiện là:

$$\left\{\begin{array}{l} m \ne 0 \\ \frac{1}{2} < -\frac{1}{m} < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow -2 < m < -1.$$

Vậy, với $-2 < m < -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

PHƯƠNG PHÁP LUẬN HỆ SỐ

Ví dụ 1: (HVQHQT – 2000): Giải phương trình: $\cos x + \cos 3x + 2\cos 5x = 0$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\cos 5x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 5x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos 2x + 2\cos 4x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^3 x - 3\cos x).\cos 2x + \cos 4x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow [(4\cos^2 x - 3).\cos 2x + \cos 4x].\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \{[2(1 + \cos 2x) - 3].\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1\}.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^2 2x - \cos 2x - 1).\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8} = \cos 2\alpha_{1,2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \pm 2\alpha_{1,2} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\alpha_{1,2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 2: (ĐHTL – 2000): Giải phương trình: $\dfrac{\sin 3x}{3} = \dfrac{\sin 5x}{5}$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$5\sin 3x = 3\sin 5x \Leftrightarrow 2\sin 3x = 3(\sin 5x - \sin 3x)$$

$$\Leftrightarrow 2(3\sin x - 4\sin^3 x) = 6\cos 4x.\sin x \Leftrightarrow (3 - 4\sin^2 x - 3\cos 4x).\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow [3 - 2(1 - \cos 2x) - 3(2\cos^2 2x - 1)].\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\cos^2 2x - \cos 2x - 2).\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\dfrac{2}{3} \\ \sin x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\dfrac{2}{3} = \cos 2\alpha \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pm 2\alpha + 2k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\alpha + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Chú ý: Các em học sinh cũng có thể giải ví dụ trên theo phương pháp tách dần:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

$$\sin 5x = \sin(x + 4x) = \sin x.\cos 4x + \cos x.\sin 4x$$

$$= \sin x.\cos 4x + 2\cos x.\cos 2x.\sin 2x = \sin x.\cos 4x + 4\cos^2 x.\cos 2x.\sin x.$$

Ví dụ 3: (ĐHGT – 1997): Giải phương trình:

$$3(\text{cotg}x - \cos x) - 5(\text{tg}x - \sin x) = 2.$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3(\text{cotg}x - \cos x + 1) - 5(\text{tg}x - \sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x + 1\right) - 5\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(\cos x - \sin x.\cos x + \sin x)}{\sin x} - \frac{5(\sin x - \sin x.\cos x + \cos x)}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - \sin x.\cos x)\left(\frac{3}{\sin x} - \frac{5}{\cos x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\dfrac{3}{\sin x} = \dfrac{5}{\cos x} & (1)\\ \sin x + \cos x - \sin x.\cos x = 0 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được: $\text{tg}x = \frac{3}{5} = \text{tg}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giải (2): Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 - \sqrt{2}\\ t = 1 + \sqrt{2} \text{ loại}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin\beta$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \beta + 2k\pi\\ x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \beta + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\\ x = \dfrac{3\pi}{4} - \beta + 2k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 4: **(ĐHQG Hà Nội Khối A – 2000): Giải phương trình:**

$$2\sin x + \text{cotg}x = 2\sin 2x + 1.$$

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Biến đổi phương trình về dạng: $(2\sin x - 1) - (2\sin 2x - \text{cotg}x) = 0$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1) - \left(4\sin x.\cos x - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1) - \frac{(4\sin^2 x - 1)\cos x}{\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)[\sin x - (2\sin x + 1)\cos x] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - \cos x - 2\sin x\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sin x - 1 = 0 & (1) \\ \sin x - \cos x - 2\sin x.\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Giải (2): Đặt $\sin x - \cos x = t$, điều kiện $|t| < \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t - (1 - t^2) = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{2}} = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \alpha + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có bốn họ nghiệm.

PHƯƠNG PHÁP HẰNG SỐ BIẾN THIÊN

Ví dụ 1: (HVQY – 1997): Giải phương trình:

$$(\sin x + 3)\sin^4\frac{x}{2} - (\sin x + 3)\sin^2\frac{x}{2} + 1 = 0.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương pháp hằng số biến thiên

Đặt $t = \sin^2\frac{x}{2}$, điều kiện $0 \le t \le 1$.

Khi đó, phương trình có dạng: $(\sin x + 3)t^2 - (\sin x + 3)t + 1 = 0$

Ta có: $\Delta = (\sin x + 3)^2 - 4(\sin x + 3) = (\sin x + 3)(\sin x - 1) \le 0$
do đó, phương trình được chuyển thành:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ t = -\dfrac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 1 = 0 \\ \sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ 1 - \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Cách 2: Phương pháp phân tích

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin^2\frac{x}{2} - 1)(\sin x + 3)\sin^2\frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\sin x + 3)\sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(\sin x + 3)\sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x + 3\sin^2 x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(\sin^2 x + 4\sin x + 4) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(\sin x + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

PHƯƠNG PHÁP NHÂN

Ví dụ 1: (HVQHQT – 1996): Giải phương trình:

$$\sin\frac{5x}{2} = 5\cos^3 x.\sin\frac{x}{2}.$$

Giải

a. Với $\cos\frac{x}{2} = 0$, ta được:

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = -1 \text{ và } \sin\frac{x}{2} = \pm 1 \Rightarrow VP = \pm 5$$

Khi đó phương trình có dạng: $\sin\frac{5x}{2} = \pm 5$ vô nghiệm.

b. Với $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$ (*)

Nhân cả hai vế của phương trình với $2\cos\frac{x}{2} \neq 0$, ta được:

$$2\sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2} = 10\cos^3 x.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sin 2x = 5\cos^3 x.\sin x$$

$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x.\cos x = 5\cos^3 x.\sin x$

$\Leftrightarrow (3 - 4\sin^2 x + 2\cos x - 5\cos^3 x).\sin x = 0$

$\Leftrightarrow (5\cos^3 x - 4\cos^2 x - 2\cos x + 1).\sin x = 0$

$\Leftrightarrow (5\cos^2 x + \cos x - 1)(\cos x - 1)\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \\ \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{10} = \cos\alpha \\ \cos x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{10} = \cos\beta \\ \sin x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\alpha + 2k\pi \\ x = \pm\beta + 2k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \pm\alpha + 2k\pi \\ x = \pm\beta + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}. \\ x = 2k\pi \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có năm họ nghiệm.

SỬ DỤNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI HỖN HỢP

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x.\cos x = \cos x + 8\cos x.\cos^3 3x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$\cos 10x + 1 + \cos 8x = \cos x + 2(4\cos^3 3x - 3\cos 3x)\cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos 9x.\cos x + 1 = \cos x + 2\cos 9x.\cos x \Leftrightarrow \cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: (HVQY – 2000): Giải phương trình:

$$\cos^2 x + \sin^3 x + \cos x = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$\cos^2 x + \cos x + \sin^2 x.\sin x = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)\cos x + (1 - \cos^2 x)\sin x = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + 1)[\cos x + (1 - \cos x)\sin x] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = -1 & (1) \\ \sin x + \cos x - \sin x.\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được: $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Giải (2): Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 - \sqrt{2} \\ t = 1 + \sqrt{2} \text{ loại} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \alpha + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 3: (ĐHCSND – 2000): Giải phương trình:

$$\cos^3x + \sin^3x = \sin2x + \sin x + \cos x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x) = \sin2x + \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\sin2x = \sin2x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x - 2)\sin2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. (ĐH Huế – 1998): $2\sin^3x + \cos2x - \sin x = 0$.

b. (ĐH Đà Nẵng Khối B – 1997): $\sin3x - \sin x + \sin2x = 0$.

c. (HVNH TPHCM – 2000): $\sin^2x + \cos^3x + \sin x = 0$.

d. (ĐHHH – 2000): $(2\sin x + 1)(3\cos4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2x = 3$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $\mathrm{tg}^2x = \dfrac{1 - \cos^3x}{1 - \sin^3x}$.

b. $\mathrm{tg}^2x = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$.

c. $\mathrm{cotg}^2x = \dfrac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

d. $\mathrm{tg}^2x = \dfrac{1 + \cos^3x}{1 + \sin^3x}$.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. (HVNH Hà Nội – 1999): $\cos^2x + \cos^3x + 2\sin x - 2 = 0$.

b. (ĐHBK TPHCM – 1991): $\sin3x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin^2x = 2\cos2x.\sin x$.

Bài tập 4: Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{3(\cos 2x + \cot g2x)}{\cot g2x - \cos 2x} - 2\sin 2x = 2.$

b. $\dfrac{\cos x}{\cos 3x} - \dfrac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x.\sin 3x.$

Bài tập 5: Giải các phương trình sau:

a. $3tg3x + cotg2x = 2tgx + \dfrac{2}{\sin 4x}.$

b. $cotgx - tgx = \sin x + \cos x.$

Bài tập 6: Giải các phương trình sau:

a. $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x.$

b. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + 2\cos 2x = 0.$

c. (ĐHSP – 1997): $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0.$

d. $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1.$

e. (ĐHQG TPHCM – 1997): $\cos x.\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{3x}{2} - \sin x.\sin\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2}.$

Bài tập 7: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x.$

b. $\sin^3 x.\cos x - \cos 2x + \sin x - \cos^3 x.\sin x - \cos x = 0.$

Bài tập 8: Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x.\sin 6x = \sin 9x.$ b. $1 + tg2x = \dfrac{1 - \sin 2x}{\cos^2 2x}.$

Bài tập 9: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x.$ b. $2\cos 2x - \sin 2x = 2(\sin x + \cos x).$

Bài tập 10: Giải các phương trình sau:

a. $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x.$

b. $\sin^2 x + 2\sin^2\dfrac{x}{2} - 2\sin x.\sin^2\dfrac{x}{2} + cotgx = 0.$

Bài tập 11: (ĐHY Hải Phòng – 2000): Tìm x thuộc đoạn [0, 14] nghiệm đúng phương trình:

$$\sin 3x + \sin 2x = 5\sin x.$$

Bài tập 12: Cho phương trình:

$$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2 x.$$

a. Giải phương trình khi m = 1.

b. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0.\pi]$.

Bài tập 13: Cho phương trình:

$$\sin 2(x - \pi) - \sin(3x - \pi) = a.\sin x$$

a. Giải phương trình với a = 1.

b. Tìm a để phương trình có ít nhất một nghiệm $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 14: Cho phương trình:

$$\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0.$$

Xác định m để phương trình có đúng 7 nghiệm thuộc khoảng $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$

Bài tập 15: Xác định m để phương trình:

$$m\cos 3x + 4(1 - 2m)\sin^2 x + (7m - 4)\cos x + 8m - 4 = 0$$

có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $(0, 2\pi)$.

Bài toán 5: Giải phương trình lượng giác bằng việc biến đổi phương trình thành tổng các đại lượng không âm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta cần nhớ các đại lượng không âm trong lượng giác, bao gồm:

$$A^2, |B|, 1 \pm \cos x, 1 \pm \sin x,$$

do đó để sử dụng phương pháp này giải phương trình lượng giác ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 0. \qquad (1)$$

Bước 2: Dùng lập luận khẳng định $A_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$.

Bước 3: Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ \ldots \\ A_n = 0 \end{cases}. \qquad (I)$$

Bước 4: Giải hệ (I).

Ví dụ 1: (CĐSP Hà Nội 2000): Giải phương trình:

$$\cos^2 4x + \cos^2 8x = \sin^2 12x + \sin^2 16x + 2.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1 - \sin^2 4x + 1 - \sin^2 8x = \sin^2 12x + \sin^2 16x + 2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 4x + \sin^2 8x + \sin^2 12x + \sin^2 16x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 8x = 0 \\ \sin 12x = 0 \\ \sin 16x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$4\cos^2x + 3tg^2x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\,tgx + 4 = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\,tgx + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & (1) \\ tgx = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & (2) \end{cases}.$$

- Giải (1) ta được: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Kiểm tra điều kiện (2)

- Với $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ta được:

$$tgx = tg(\frac{\pi}{6} + 2k\pi) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ không thoả mãn.}$$

- Với $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ta được:

$$tgx = tg(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi) = tg(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ thoả mãn.}$$

Vậy $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\cos 2x - \cos 6x + 4(3\sin x - 4\sin^3x + 1) = 0$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 2x + 1 + 1 - \cos 6x + 4\sin 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2x + 2\sin^2 3x + 4\sin 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2x + 2(\sin 3x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \\ 3\sin x - 4\sin^3 x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$\sin^2x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\sin^2x - 4\sin x.\sin^2 3x + \sin^4 3x - \sin^4 3x + \sin^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - \sin^2 3x)^2 + (1 - \sin^2 3x)\sin^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\sin x - \sin^2 3x = 0 \\ (1 - \sin^2 3x)\sin^2 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x \\ \left[\begin{array}{l} \sin^2 3x = 1 \\ \sin^2 3x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sin^2 3x = 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \sin^2 3x = 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (3\sin x - 4\sin^3 x)^2 = 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 3\sin x - 4\sin^3 x = 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Cách 2: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sin^2x - \sin x.\sin^2 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = 0. \qquad (1)$$

Coi (1) là phương trình bậc 2 theo sinx, ta có:

$$\Delta = \sin^4 3x - \sin^2 3x = (\sin^2 3x - 1)\sin^2 3x < 0, \forall x$$

do đó được chuyển thành hệ:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sin^2 3x = 1 \\ \sin^2 3x = 0 \end{array}\right. \\ \sin x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sin^2 3x = 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \sin^2 3x = 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (3\sin x - 4\sin^3 x)^2 = 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 3\sin x - 4\sin^3 x = 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải phương trình:

a. (ĐHY Hà Nội – 1997): $\cos^{n}x + \sin^{n}x = \cos 2x$.

b. $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x$.

Bài tập 2. Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y) = \frac{9}{4}$.

Bài tập 3. Giải phương trình: $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^2 y + \mathrm{cotg}^2(x + y) = 1$.

Bài tập 4. Giải phương trình: $x^2 - 2x.\sin xy + 1 = 0$.

Bài toán 6: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta đánh giá phương trình dựa trên các dạng:

Dạng 1: Tính chất của các hàm số lượng giác và biểu thức lượng giác.

Dạng 2: Phương trình lượng giác dạng Pitago.

Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi.

Dạng 4: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

Sau đây ta sẽ xét từng dạng.

TÍNH CHẤT CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Ví dụ 1: Giải phương trình: $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 3x = 2$.

Giải

Ta có nhận xét: $\begin{cases} |\sin x + \sqrt{3}\cos x| \le 2 \\ |\sin 3x| \le 1 \end{cases} \Rightarrow |(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 3x| \le 2$

do đó, phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = -2 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{3}) = -1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: (ĐHD 2000): Giải phương trình:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x.\cos 2x.\cos 3x + 2.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x).\cos 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x = \cos^2 3x + \cos x.\cos 3x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x = \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) + \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + 4$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 3 \qquad (*)$$

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \cos 2x \le 1 \\ \cos 4x \le 1 \\ \cos 6x \le 1 \end{cases} \Rightarrow VT = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x \le 3$$

do đó, phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 4x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ 2\cos^2 2x - 1 = 1 \\ 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 3: (ĐHNT Hà Nội – 2000): Giải phương trình:

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 - 2\sin^2 x)\sin^8 x - (2\cos^2 x - 1)\cos^8 x = \frac{5}{4}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x.\sin^8 x - \cos 2x.\cos^8 x = \frac{5}{4}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (\sin^8 x - \cos^8 x)\cos 2x = \frac{5}{4}\cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 2x = 0 & (1) \\ \sin^8 x - \cos^8 x = \frac{5}{4} & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được: $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

Giải (2): Ta có nhận xét: $VT = \sin^8 x - \cos^8 x \le \sin^8 x \le 1 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 4: (ĐHNT Hà Nội − 1995): Giải phương trình:

$$4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\cos x - 2\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = 1 \Leftrightarrow 2\cos x - (1 + \cos 2x)\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x - 2\cos^2 x.\cos 2x = 0 \Leftrightarrow (1 - \cos x.\cos 2x)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - \cos 3x - \cos x)\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = 0 & (1) \\ \cos 3x + \cos x = 2 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Giải (2): Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \cos 3x \le 1 \\ \cos x \le 1 \end{cases} \Rightarrow VT = \cos 3x + \cos x \le 2$$

do đó

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^3 x - 3\cos x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 5: (HVCNBCVT − 1998): Giải phương trình:

$$\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4(\sin x - \cos x).$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 4x - (1 + \cos 4x) = 4(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x - 2\cos^2 2x = 4(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin 2x - \cos 2x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 4(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)[(\sin 2x - \cos 2x)(\cos x + \sin x) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x - \sin x = 0 & (1) \\ (\sin 2x - \cos 2x)(\cos x + \sin x) + 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \text{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Giải (2): Ta có:

$$2\sin(2x - \frac{\pi}{4}).\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -2 \Leftrightarrow \sin 3x + \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -2$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x - \cos x = -2.$$

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \sin 3x \ge -1 \\ -\cos x \ge -1 \end{cases} \Rightarrow VT = \sin 3x - \cos x \ge -2$$

do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ -\cos x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC DẠNG PITAGO

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\frac{1}{4}(\sin^{10}x + \cos^{10}x) = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 2x + 4\cos^2 2x}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có nhận xét:

$$VP = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x.\cos^2 x}{4(\sin^2 2x + \cos^2 2x) - 3\sin^2 2x} = \frac{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x}{4 - 3\sin^2 2x} = \frac{1}{4}.$$

Mặt khác:

$$\begin{cases} \cos^{10} x \le \cos^2 x \\ \sin^{10} x \le \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow VT = \frac{1}{4}(\sin^{10}x + \cos^{10}x) < \frac{1}{4}(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{4}$$

do đó

$$(1) \Leftrightarrow VT = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^{10} x = \cos^2 x \\ \sin^{10} x = \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: (ĐHNN I – 2000): Giải phương trình:

$$\cos^5 x + \sin^5 x + \sin 2x + \cos 2x = 1 + \sqrt{2}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \cos^5 x \le \cos^2 x \\ \sin^5 x \le \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow \cos^5 x + \sin^5 x \le \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) < \sqrt{2}$$

suy ra:

$$VT = \cos^5x + \sin^5x + \sin2x + \cos2x \le 1 + \sqrt{2}$$

do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos^5 x = \cos^2 x\\ \sin^5 x = \sin^2 x\\ \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos^5 x = \cos^2 x\\ \sin^5 x = \sin^2 x\\ x = \frac{\pi}{8} + k\pi\end{array}\right. \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

Ví dụ 1: (HVQY – 1997): Giải phương trình:

$$\sin^8 2x + \cos^8 2x = \frac{1}{8}. \qquad (1)$$

Giải

Cách 1: Sử dụng phương pháp giải phương trình lượng giác hỗn hợp chứa các biểu thức đối xứng với $\sin^{2n}x$ và $\cos^{2n}x$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin^8 2x + \cos^8 2x &= (\sin^4 2x + \cos^4 2x)^2 - 2\sin^4 2x.\cos^4 2x\\ &= [(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x.\cos^2 2x]^2 - 2\sin^4 2x.\cos^4 2x\\ &= (1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 4x = \frac{1}{8}\sin^4 4x - \sin^2 4x + 1.\end{aligned}$$

Do đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{8}\sin^4 4x - \sin^2 4x + 1 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sin^4 4x - 8\sin^2 4x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 4x = 1\\ \sin^2 4x = 1 \text{ loại}\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Côsi

Ta có nhận xét:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos^8 2x + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \overset{\text{Côsi}}{\ge} \frac{1}{2}\cos^2 2x\\ \sin^8 2x + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \overset{\text{Côsi}}{\ge} \frac{1}{2}\sin^2 2x\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \sin^8 2x + \cos^8 2x + 6.\left(\frac{1}{2}\right)^4 \ge \frac{1}{2}(\sin^2 2x + \cos^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^8 2x + \cos^8 2x \ge \frac{1}{8}$$

do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^8 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ \sin^8 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \sin^2 2x = \cos^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: Với $2 \le n \in \mathbf{N}$, giải phương trình:

$$(\text{tg}x + \frac{1}{4}\text{cotg}x)^n = \sin^n x + \cos^n x \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. (*)

Ta có nhận xét:

$$|\text{VT}| = |(\text{tg}x + \frac{1}{4}\text{cotg}x)^n|$$

$$= (|\text{tg}x| + \frac{1}{4}|\text{cotg}x|)^n \overset{\text{Côsi}}{\geq} (2\sqrt{\frac{1}{4}|\text{tg}x|.|\text{cotg}x|})^n = 1$$

$$\begin{cases} \cos^n x \le \cos^2 x \\ \sin^n x \le \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow \text{VT} = \sin^n x + \cos^n x \le \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{VT} = \text{VP} = 1 \\ \text{VT} = \text{VP} = -1 \end{array}\right. \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{VT} = 1 \\ n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg}x = \frac{1}{4}\text{cotg}x \\ n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg}^2 x = \frac{1}{4} \\ n = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg}x = \pm\frac{1}{2} = \pm\text{tg}\alpha \\ n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\alpha + k\pi \\ n = 2 \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm và với $n = 2$.

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPXKI

Ví dụ 1: (Đề 146). Giải phương trình:

$$\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x.\sqrt{2 - \sin^2 x} = 3.$$

Giải

Ta có:

$$\text{VT}^2 = (1.\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}.1 + \sin x.\sqrt{2 - \sin^2 x})^2$$

$$\le (1^2 + 2 - \sin^2 x + \sin^2 x)(\sin^2 x + 1 + 2 - \sin^2 x) = 9$$

$$\Rightarrow \text{VT} \le 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: (ĐHAN): Giải phương trình:

$$2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x.\sin x. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng: $2(\cos x - \cos 28x\sin x) = \sqrt{2}(3 - \sin 10x)$

Ta có:

$$VT \le 2.\sqrt{1 + \cos^2 28x} \le 2\sqrt{2}.$$

$$VP \ge \sqrt{2}(3 - 1) = 2\sqrt{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} VT = 2\sqrt{2} \\ VP = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 28x = 1 \\ \sin 10x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 28x = 0 \\ \sin 10x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(20x + 8x) = 0 \\ \sin 10x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 8x = 0 \\ \cos 8x.\sin 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $\sin 2x.\cos 8x = 1.$

b. $\sin^3 x + \cos^3 x = (2 - \sin^4 x).$

c. $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x.$

d. $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1.$

e. $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x.$

f. $\sin^2 2x - tg^2 x = \frac{9}{2}\cos 2x.$

g. $\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x} + \dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} = \dfrac{2}{\sin 3x}.$

h. $2\sin 3x - \dfrac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x}.$

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $\cot g 2x + \cot g 3x + \dfrac{1}{\sin x.\sin 2x.\sin 3x} = 0.$

b. $\dfrac{\sin 4x + \sin 2x - 4\sin 3x + 2\cos 2x - 4}{\sin x - 1} = 0.$

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $7\cos^2x + 1995\sin^{1994}x = 1995$.

b. $\cos^{13}x + \sin^{14}x = 1$.

c. $\cos^{13}x + \sin^{14}x = 1$.

d. $\sin^{2000}x + \cos^{2000}x = 1$.

Bài tập 4: Giải các phương trình:

a. $(\sin^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\sin^3\frac{x}{2}})^2 + (\cos^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^3\frac{x}{2}})^2 = \frac{81}{4}\cos^2 4x$.

b. $\left(\text{tg}x + \frac{1}{4}\text{cotg}x\right)^n = \cos^n x + \sin^n x$, với $n \in \mathbf{N}, n > 2$.

Bài tập 5: Giải các phương trình:

a. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$.

b. $\cos x = 1 + x$.

c. $\sin x + \text{tg}x - 2x = 0$, với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

d. $x - \sin\frac{\pi}{3}(x + 1)\sin\frac{\pi(1 - x)}{3} = 0$ với $x \in [0,1]$

Bài tập 6: Giải các phương trình:

a. $x^2 - 2x.\sin xy + 1 = 0$

b. $12\sin x + 5\cos x = 2y^2 - 8x + 21$

c. $\frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5$.

d. $\left(\cos^2x + \frac{1}{\cos^2x}\right)^2 + \left(\sin^2x + \frac{1}{\sin^2x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y$

Bài tập 7: Giải các phương trình:

a. $(2m + 1)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) + 2m^2 + 2m + 2 = 0$.

b. $2m^2 - 2m(\cos x + \sin x) + \frac{3}{2} = \cos x - \sin x$.

Bài tập 8: (Đề 74): Tìm a để phương trình có nghiệm:

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = (a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6) + 7 + \sin 3x.$$

CHỦ ĐỀ 4

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) + f(y) = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases},$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}, \qquad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases},$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x \pm \operatorname{tg}y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}, \qquad \begin{cases} \operatorname{cotg}x \pm \operatorname{cotg}y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}.$$

Ta chuyển tổng $f(x) \pm f(y)$ về dạng tích bằng việc sử dụng các công thức biến đổi tổng thành tích.

Chú ý: Phương pháp chung là nếu biết tổng x + y thì cần tìm hiệu x − y hay ngược lại, tức là:

- Ta đi biến đổi phương trình:

$$f(x) \pm f(y) = m \Leftrightarrow g_1(x + y).g_2(x - y) = m_1. \qquad (*)$$

- Từ đó thay phương trình $x \pm y = \alpha$ vào (*) để tìm biểu thức còn lại.

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x + \sin y = m & (1) \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} & (2) \end{cases}$

a. Giải hệ với m = 1.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} = m \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{x-y}{2} = m \Leftrightarrow \cos\frac{x-y}{2} = m. \quad (3)$$

a. Với m = 1, ta được:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 2k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} - 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

b. Hệ có nghiệm khi

(3) có nghiệm $\Leftrightarrow |m| \le 1$.

Vậy, với $|m| \le 1$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y = m & (1) \\ x + y = \dfrac{3\pi}{4} & (2) \end{cases}$$

a. Giải hệ với m = 2.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y} = m \Leftrightarrow \sin(x-y) = \frac{m}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\sin(x-y) - m\cos(x-y) = -\frac{m\sqrt{2}}{2}. \qquad (3)$$

a. Với m = 2, ta được: $(3) \Leftrightarrow \sin(x-y) - \cos(x-y) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - y - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(x - y - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x - y - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x - y = \dfrac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{array}\right..$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = \dfrac{17\pi}{12} + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{3} - k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{13\pi}{12} + k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{3} - k\pi \end{cases} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

b. Hệ có nghiệm khi:

(3) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 4 + m^2 \geq \dfrac{m^2}{2} \Leftrightarrow 8 + m^2 \geq 0$ luôn đúng.

Vậy, hệ có nghiệm với mọi m.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ x - y = -\dfrac{\pi}{4} & (2) \end{cases}$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2\sin(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4}).\cos(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \sin\frac{\pi}{8}.\cos(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}. \qquad (3)$$

Ta có: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\dfrac{\pi}{8} \Rightarrow \sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$= 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow \cos(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos\frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{8} + 2k\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = \dfrac{3\pi}{4} + 4k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} + 4k\pi \end{array}\right.$$

Do đó, hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = \dfrac{3\pi}{4} + 4k\pi \\ x - y = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} + 4k\pi \\ x - y = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2} \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$. b. $\begin{cases} tgx + tgy = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

Bài tập 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \cos x + \cos y = 2m \\ x - y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

a. Giải hệ với $m = -1$.
b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 3: (ĐHQG TPHCM Khối D – 1999): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ 2\sin^2 x + 2\cos^2 y = 2m + 1 \end{cases}$$

a. Giải hệ với $m = 0$.
b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = a \\ \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = b \end{cases}$.

a. Giải hệ khi $a = \dfrac{5\pi}{12}$ và $b = 2$.
b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

Bài tập 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2\cos 6x - \cos 2y = a \\ 3x - 2y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

a. Giải hệ khi $a = -3$.
b. Xác định a để hệ có nghiệm.

Bài tập 6: Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = m \\ x + y = 2\pi \end{cases}$.　　b. $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos\alpha \\ x + y = \alpha \end{cases}$.

Bài toán 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x).g(y) = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases},$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x.\sin y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos x.\cos y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases},$$

$$\begin{cases} \sin x.\cos y = m \\ x + y = \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} \operatorname{tg}x.\operatorname{tg}y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases},$$

Ta chuyển tích f(x).g(y) về dạng tổng bằng việc sử dụng các công thức biến đổi tích thành tổng.

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x.\sin y = m & (1) \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} & (2) \end{cases}$

a. Giải hệ với $m = \frac{1}{2}$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)] = m \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \cos\frac{\pi}{3} - \cos(x + y) = 2m$$

$$\Leftrightarrow \cos(x + y) = \frac{1 - 4m}{2}. \qquad (3)$$

a. Với $m = \frac{1}{2}$, ta được (3) $\Leftrightarrow \cos(x + y) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x + y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Do đó, hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

b. Hệ có nghiệm khi: (3) có nghiệm $\Leftrightarrow \left|\frac{1 - 4m}{2}\right| \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$.

Vậy, với $-\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \text{tg}x.\text{tg}y = m & (1) \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} & (2) \end{cases}$

a. Giải hệ với m = 3.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \cos y \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$.

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin y}{\cos y} = m \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)] = \frac{m}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \cos(x-y)-\cos\frac{\pi}{3}=m\left[\cos\frac{\pi}{3}+\cos(x-y)\right]$$

$$\Leftrightarrow (1-m)\cos(x-y)=\frac{m+1}{2}. \qquad (3)$$

a. Với m = 3, khi đó (3) có dạng:

$$-2\cos(x-y)=2 \Leftrightarrow \cos(x-y)=-1 \Leftrightarrow x-y=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Do đó, hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x-y=\pi+2k\pi \\ x+y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi \\ y=-\dfrac{\pi}{3}-k\pi \end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$$

b. Ta xét hai trường hợp

- Với $1-m=0 \Leftrightarrow m=1$, khi đó:

  (3) $\Leftrightarrow 0=1$, vô lí $\Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

- Với $1-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$

  Khi đó: (3) $\Leftrightarrow \cos(x-y)=\dfrac{m+1}{2(1-m)}$. (4)

Hệ có nghiệm khi: (4) có nghiệm $\Leftrightarrow \left|\dfrac{m+1}{2(1-m)}\right|\leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 3 \\ m\leq\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Vậy, với $m\in\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty)$ hệ có nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \cos x.\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ x+y=\dfrac{7\pi}{12} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \text{tg}x.\text{tg}y=3 \\ x+y=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$.

Bài tập 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x.\sin y=2m \\ x+y=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$.

a. Giải hệ với m = 1.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 3: Xác định a để hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3} \\ \cos x.\cos y=a \end{cases}.$$

Bài tập 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} tgx.tgy = m \\ x - y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$.

a. Giải hệ với m = 3.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = a \\ \sin x.\sin y = b \end{cases}$.

Tìm b để hệ có nghiệm với mọi a. Tìm nghiệm đó.

Bài tập 6: Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin^2 x.\sin^2 y = b \end{cases}.$$

Bài toán 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)}{f(y)} = m & (1) \\ x + y = \alpha & (2) \end{cases},$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện cho f(y) ≠ 0.

Bước 2: Biến đổi (1) dựa vào phương pháp luận hệ số để làm xuất hiện (2) và biểu thức còn lại.

Bước 3: Tìm nghiệm của hệ.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2 & (1) \\ 3(x + y) = 2\pi & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện: siny ≠ 0 <> y ≠ kπ, k ∈ Z.

Biến đổi (1) về dạng:

$$\sin x = 2\sin y <> 2\sin x = 4\sin y <> 3(\sin x - \sin y) = \sin x + \sin y$$

$$<> 6\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\overset{(2)}{<>} 3\cos\frac{\pi}{3}.\sin\frac{x-y}{2} = \sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$<> tg\frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} <> \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi <> x - y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z.$$

Do đó, hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} - k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{\text{tg}x}{\text{tg}y} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} & (1) \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} & (2) \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \\ \text{tg}y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \dfrac{l\pi}{2} \end{cases}, k, l \in \mathbf{Z}.$

Biến đổi (1) về dạng: $\dfrac{\sin x.\cos y}{\sin y.\cos x} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos y - \sin y.\cos x = -\sqrt{2}(\sin x.\cos y + \sin y.\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - y) = -\sqrt{2}\sin(x + y) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \sin(x - y) = -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - y) = -1 \Leftrightarrow x - y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Do đó, hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ y = \dfrac{3\pi}{8} - k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{2} \\ 12(x + y) = 5\pi \end{cases}$. b. $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos y} = 2 \\ 6(x + y) = 5\pi \end{cases}$.

Bài tập 2: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \dfrac{\text{tg}x}{\text{tg}y} = \sqrt{3} \\ x + y = \dfrac{7\pi}{12} \end{cases}$. b. $\begin{cases} \dfrac{\text{cotg}x}{\text{cotg}y} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

II. CÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x.\cos y = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x.\sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Giải

Biến đổi tương đương hệ bằng cách cộng và trừ vế với vế hai phương trình đã cho, ta được:

$$\begin{cases} \sin x.\cos y + \cos x.\sin y = 0 \\ \sin x.\cos y - \cos x.\sin y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ \sin(x-y) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = k\pi \\ x - y = -\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + (\dfrac{k}{2} + l)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + (\dfrac{k}{2} - l)\pi \end{cases}, k, l \in \mathbf{Z}.$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin^4 x = \cos x.\cos y \\ \cos^4 x = \sin x.\sin y \end{cases}.$

Giải

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y \\ \sin^4 x - \cos^4 x = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x = \cos(x - y) \\ -\cos 2x = \cos(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + \cos 4x = 4\cos(x - y) & (1) \\ \cos 2x = \cos(\pi - x - y) & (2) \end{cases}$$

Giải (2), ta được: $\left[\begin{array}{l} 2x = \pi - x - y + 2k\pi \\ 2x = -\pi + x + y + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 4x - \pi - 2k\pi \\ x - y = -\pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$

- Với $x - y = 4x - \pi - 2k\pi$, thay vào (1) ta được:

$$3 + \cos 4x = 4\cos(4x - \pi - 2k\pi) \Leftrightarrow 3 + \cos 4x = -4\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{3}{5} = \cos 4\alpha \Leftrightarrow 4x = \pm 4\alpha + 2l\pi \Leftrightarrow x = \pm\alpha + \frac{l\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + \dfrac{l\pi}{2} \ \& \ y = \pi - 3\alpha + (2k - \dfrac{3l}{2})\pi \\ x = -\alpha + \dfrac{l\pi}{2} \ \& \ y = \pi + 3\alpha + (2k - \dfrac{3l}{2})\pi \end{array}\right., l \in \mathbf{Z}.$$

- Với $x - y = \pi + 2k\pi$, thay vào (1) ta được:

$$3 + \cos 4x = 4\cos(\pi + 2k\pi) \Leftrightarrow 3 + \cos 4x = -4$$

$\Leftrightarrow \cos 4x = -7$ vô nghiệm

Vậy, hệ có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = \alpha + \dfrac{l\pi}{2} \ \& \ y = \pi - 3\alpha + (2k - \dfrac{3l}{2})\pi \\ x = -\alpha + \dfrac{l\pi}{2} \ \& \ y = \pi + 3\alpha + (2k - \dfrac{3l}{2})\pi \end{array}\right., l \in \mathbf{Z}.$$

Ví dụ 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x.\cos y = m \\ 3\text{tg}x = \text{tg}y \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m = \frac{1}{4}$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbf{Z}. \qquad (*)$$

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} \sin x.\cos y = m \\ 3\sin x.\cos y = \sin y.\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x.\cos y = m \\ \sin y.\cos x = 3m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x.\cos y + \cos x.\sin y = m \\ \sin x.\cos y - \cos x.\sin y = -2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 4m \\ \sin(x-y) = -2m \end{cases}. \qquad (I)$$

a. Với $m = \frac{1}{4}$, ta được:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = k\pi \\ \left[\begin{array}{l} x - y = -\dfrac{\pi}{6} + 2l\pi \\ x - y = \dfrac{7\pi}{6} + 2l\pi \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{(k+2l)\pi}{2} \ \& \ y = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{(k-2l)\pi}{2} \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{(k+2l)\pi}{2} \ \& \ y = -\dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{(k-2l)\pi}{2} \end{array}\right., \mathbf{k, l \in Z} \textbf{ thoả mãn } \mathbf{(*)}.$$

b. Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \text{(I) có nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ |4m| \leq 1 \\ |-2m| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\backslash\{0\}.$$

Vậy, với $m \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\backslash\{0\}$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \cos x = a.\cos^3 y \\ \sin x = a.\sin^3 y \end{cases}$. (I)

a. Giải hệ với $a = \dfrac{1}{2}$.

b. Tìm a để hệ có nghiệm.

Giải

Ta thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{cases} \cos^2 x = a^2.\cos^6 y \\ \sin^2 x = a^2.\sin^6 y \end{cases} \Rightarrow \sin^2x + \cos^2x = a^2(\sin^6y + \cos^6y)$$

$$\Leftrightarrow 1 = a^2[(\sin^2y + \cos^2y)^3 - 3(\sin^2y + \cos^2y)\sin^2y.\cos^2y]$$

$$\Leftrightarrow 1 = a^2(1 - \frac{3}{4}\sin^22y) \Leftrightarrow 3a^2.\sin^22y = 4(a^2 - 1). \qquad (1)$$

a. Với $a = \frac{1}{2}$, ta được (1) $\Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin^22y = -3$ vô nghiệm

Vậy với $a = \frac{1}{2}$, hệ vô nghiệm.

b. Để hệ có nghiệm trước hết (1) có nghiệm, ta có điều kiện:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \left|\dfrac{4(a^2 - 1)}{3a^2}\right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq \lvert a \rvert \leq 2.$$

Với $1 \leq \lvert a \rvert \leq 2$, giả sử (1) có nghiệm y_0, tức là:

$$3a^2.\sin^22y_0 = 4(a^2 - 1) \Leftrightarrow a^2(\sin^6y_0 + \cos^6y_0) = 1$$

$\Leftrightarrow (a.\sin^3y_0)^2 + (a.\cos^3y_0)^2 = 1$, tức là hệ (I) luôn có nghiệm x_0.

Vậy, với $1 \leq \lvert a \rvert \leq 2$ hệ đã cho có nghiệm.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{5\cos^5 y} & (1) \\ \operatorname{tg}x = \sqrt{4 - \sin^3 y} & (2) \end{cases}$.

Giải

Bình phương (1) và (2) rồi trừ theo vế, thu được:

$$1 = 5\cos^5y - 4 + \sin^3y \Leftrightarrow 5\cos^5y + \sin^3y = 5. \qquad (3)$$

Ta có nhận xét:

$$5\cos^5y + \sin^3y \leq 5\lvert\cos^5y\rvert + \lvert\sin^3y\rvert = 4\lvert\cos^5y\rvert + (\lvert\cos^5y\rvert + \lvert\sin^3y\rvert)$$

$$< 4.1 + (\lvert\cos^2y\rvert + \lvert\sin^2y\rvert) = 5$$

Do đó (3) có nghiệm khi:

$$\begin{cases}5\cos^5 y+\sin^3 y=5|\cos^5 y|+|\sin^3 y|\\ |\cos^5 y|=1\\ |\cos^5 y|+|\sin^3 y|=1\end{cases} \Leftrightarrow \cos y=1 \Leftrightarrow y=2k\pi, k\in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Thay (4) vào hệ, ta được:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos x}=\sqrt{5}\\ \operatorname{tg}x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\cos\alpha,\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\\ \sin x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases} \Leftrightarrow x=\alpha+2l\pi, l\in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases}x=\alpha+2l\pi\\ y=2k\pi\end{cases}$, k, l $\in$ **Z**.

Ví dụ 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}\sin x+\sin y=3m\\ \sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{5m}{2}\end{cases}$

a. Giải hệ với $m=\dfrac{1}{2}$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Đặt: $\begin{cases}u=\sin x\\ v=\sin y\end{cases}$, điều kiện $|u|\le 1$, $|v|\le 1$. (*)

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases}u+v=3m\\ u^2+v^2=\dfrac{5m}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=3m\\ (u+v)^2-2uv=\dfrac{5m}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=3m\\ uv=\dfrac{18m^2-5m}{4}\end{cases}$$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2-3mt+\frac{18m^2-5m}{4}=0 \Leftrightarrow f(t)=4t^2-12mt+18m^2-5m=0. \quad (1)$$

a. Với $m=\dfrac{1}{2}$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=1\\ \sin y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin y=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ y=\dfrac{\pi}{6}+2l\pi \vee y=\dfrac{5\pi}{6}+2l\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\\ y=\dfrac{\pi}{2}+2l\pi\end{cases}\end{array}\right., k, l\in \mathbb{Z}.$$

b. Hệ có nghiệm khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm thoả mãn $-1\le t_1<t_2<1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(-1) \geq 0 \\ af(1) \geq 0 \\ -1 \leq \frac{S}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -36m^2 + 20m \geq 0 \\ 18m^2 + 7m + 4 \geq 0 \\ 18m^2 - 17m + 4 \geq 0 \\ -1 < \frac{3m}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq \frac{5}{9} \\ \left[\begin{array}{l} m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq \frac{4}{9} \end{array} \right. \\ -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq m \leq \frac{4}{9} \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{5}{9} \end{array} \right.$$

Vậy với $m \in [0, \frac{4}{9}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{5}{9}]$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(\sin x + \sin y) = 1 \\ 2(\cos x + \cos y) = \sqrt{3} \end{cases}$.

Giải

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (1)$$

Vậy hệ tương đương với:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \sin x + \sin(\frac{\pi}{3} - x + 2k\pi) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \sin x + \sin(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ 2\sin\frac{\pi}{6}.\cos(-\frac{\pi}{6} + x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \cos(-\frac{\pi}{6} + x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{6} + x = \pm\frac{\pi}{6} + 2l\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ x = 2l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} + 2(k-l)\pi \\ x = 2l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{2\pi}{3} + 2(k-l)\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \end{array} \right.,\ k, l \in \mathbf{Z}.$$

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y + \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y = -1 \quad (1) \\ \sqrt{3}\cos 2x + \cos 2y = -1 \quad (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Biến đổi (1) về dạng: $\sin x.\cos y - \sin y.\cos x + \sin x.\sin y = -\cos x.\cos y$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos y - \sin y.\cos x = -(\cos x.\cos y + \sin x.\sin y)$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - y) = -\cos(x - y) \Leftrightarrow \mathrm{tg}(x - y) = -1$$

$$\Leftrightarrow x - y = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + y + k\pi, k \in \mathbf{Z}. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{2} + 2y + 2k\pi) + \cos 2y = -1 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin 2y + \cos 2y = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2y - \frac{1}{2}\cos 2y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2y - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2l\pi \\ 2y - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{\pi}{6} + l\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + (k + l)\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + (k + l)\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \end{array}\right., k, l \in \mathbf{Z}.$$

Chú ý: Rất nhiều tài liệu biến đổi (1) như sau:

$$\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y = -1 - \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y \Leftrightarrow \frac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y}{1 + \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y} = -1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}(x - y) = -1$$

$$\Leftrightarrow x - y = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Nhưng để có được biến đổi như vậy nhất thiết phải xét hai trường hợp

$1 + \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y = 0$ và $1 + \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y \neq 0$.

Ví dụ 9: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m - 5 \\ y + \cos x = 2 \end{cases}. \qquad (I)$$

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm $(-x_0, y_0)$. Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất thì:

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \qquad (*)$$

Với $x_0 = 0$, ta được: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = m - 5 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 6$.

Điều kiện đủ: Với m = 6 ta được: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ y + \cos x = 2 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có : $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow y + \cos x \le 2.$

Vậy, hệ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y = 1 \\ \cos x = 1 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với m = 6 hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 10: (Đề 23): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x = 2\sin(y + \frac{\pi}{4}) \\ \operatorname{tg}y + \operatorname{cotg}y = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}.$$

Giải

Đều kiện: $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin 2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq k\pi \\ 2y \neq l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{2} \\ y \neq \frac{l\pi}{2} \end{cases}$, k, l ∈ **Z**.

Tacó: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha.\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

do dóhệ được biến đổi về dạng: $\begin{cases} \sin(y + \frac{\pi}{4}).\sin 2x = 1 \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}).\sin 2y = 1 \end{cases} \overset{|\sin\alpha| \le 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin(y + \frac{\pi}{4}) = \sin 2x = 1 \\ \sin(y + \frac{\pi}{4}) = \sin 2x = -1 \end{array}\right. \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}).\sin 2y = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \& \ y = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ \& \ y = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi \end{array}\right. \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}).\sin 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \& \ y = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \\ \sin k\pi.\sin 2(\frac{\pi}{4} + 2l\pi) = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ \& \ y = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi \\ \sin(-\frac{\pi}{2} + k\pi).\sin 2(-\frac{3\pi}{4} + 2l\pi) = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ \& \ y = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi \\ k = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ y = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi \end{cases}, n, l \in \mathbf{Z}.$$

Vậy hệ có một họ cặp nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sin x.\cos y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x.\sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ b. $\begin{cases} \sin x.\sin y = -\dfrac{1}{4} \\ \cos x.\cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Bài tập 2: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sin x + \sin y = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ b. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Bài tập 3: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 3\sin x + 2\sin y = 0 \\ 6\cos x + 4\cos y = 5 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \sin y = 5\sin x \\ 3\cos x + \cos y = 2 \end{cases}$

Bài tập 4: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} + a \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} - a \end{cases}$. b. $\begin{cases} \text{tg}x + \text{tg}y = 1 \\ \text{tg}\dfrac{x}{2} + \text{tg}\dfrac{y}{2} = 2 \end{cases}$.

Bài tập 5: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} 3(\sin x - \sin y) = 4(\sin 2x - \sin 2y) \\ 3(\cos x - \cos y) = 4(\cos 2x - \cos 2y) \end{cases}$, b. $\begin{cases} \text{tg}x + \sin 2y = \sin 2x \\ 2\sin y.\cos(x - y) = \sin x \end{cases}$.

Bài tập 6: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \cos 2y + \dfrac{1}{2} = (\cos y - \dfrac{1}{2})(1 + 2\sin 2x) \\ \sin y(\text{tg}x + \text{cotg}y) = 2\text{cotg}y \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sin^2 x - 2\sin x.\cos 2y = \cos\dfrac{x+y}{2} + \cos\dfrac{x-y}{2} + 2 \\ \cos^2 2y + \dfrac{1}{2}(\cos x + \cos y) - 1 = 0 \end{cases}$.

Bài tập 7: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \sin \pi x.\cos \pi y = \dfrac{1}{4} \\ 3\text{tg}\pi x = \text{tg}\pi y \end{cases}, 0 < x + y < 2.$ b. $\begin{cases} \sin \pi x.\sin \pi y = \dfrac{3}{4} \\ \text{tg}\pi x.\text{tg}\pi y = 3 \end{cases}$.

Bài tập 8: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \cos x.\cos y = m + 1 \\ \sin x.\sin y = 4m^2 + 2m \end{cases}$

a. Giải hệ trên khi $m = -\frac{1}{4}$. b. Xác định m để hệ có nghiệm.

Bài tập 9: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x.\cos y = b \end{cases}$.

a. Giải hệ khi $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$.

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm

Bài tập 10: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = a \\ \mathrm{tg}(x + y) = b \end{cases}$.

a. Giải hệ khi $a = \sqrt{3} + 1, b = -(2 + \sqrt{3})$.

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

Bài tập 11: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 1 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = m \end{cases}$.

a. Giải hệ trên khi $m = \frac{3}{2}$. b. Xác định m để hệ có nghiệm.

Bài tập 12: Xác định m để các hệ phương trình sau có nghiệm:

a. $\begin{cases} \cos x + m\cos y = 1 \\ \sin x + m\sin y = 1 \end{cases}$. b. $\begin{cases} \sin x + \sin 2y = 1 \\ \cos x = m(\sin y + \cos y) \end{cases}$.

c. $\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 1 \\ \cos^2 x + \cos^2 y = m \end{cases}$. d. $\begin{cases} \cos x = m\cos^3 y \\ \sin x = m\sin^3 y \end{cases}$

e. $\begin{cases} \sin^2 x + m\mathrm{tg}y = m \\ \mathrm{tg}^2 y + m\sin x = m \end{cases}$ f. $\begin{cases} \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = m \\ \cos 2x + \cos 2y = 1 \end{cases}$

Bài tập 13: Xác định m để hệ sau có nghiệm (x,y) thoả mãn $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ và $y \in (0, \pi)$:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = m - 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = 2m^2 - 2 \end{cases}.$$

Bài tập 14: Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất:

a. $\begin{cases} a(|x| + 1) = y + \cos x \\ |\sin x| + y^2 = 1 \end{cases}$. b. $\begin{cases} ax^2 + a = y + |\cos x| \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$.

Bài tập 15: Giải và biện luận các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \cos x = \cos^2 y \\ \sin x = a\sin y \end{cases}$. b. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2\sin\alpha \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 2\sin^2\alpha \end{cases}$.

Bài tập 16: Giải và biện luận các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \cos x = m\cos 2y \\ \cos y = m\cos 2x \end{cases}$. b. $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = a \\ \mathrm{tg}(x + y)\mathrm{tg}(x - y) = a - 1 \end{cases}$.

PHỤ LỤC
PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ

I. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp lượng giác hoá để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức với mục đích thay đổi hình thức của bài toán chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức đại số thành việc chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác.

Ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Lượng giác hoá đẳng thức.

Bước 2: Thực hiện việc chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác.

Chú ý: Các em học sinh cần ôn lại các phương pháp chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác, để có thể nhanh chóng tiếp cận được phương pháp này.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $|4[a^3 - \sqrt{(1-a^2)^3}] - 3(a - \sqrt{1-a^2})| \le \sqrt{2}$.

Giải

Điều kiện : $1 - a^2 \ge 0 \Leftrightarrow |a| \le 1$.
Đặt $a = \cos\alpha$, với $\alpha \in [0, \pi]$.
Khi đó, bất đẳng thức được biến đổi về dạng:

$$|4[\cos^3\alpha - \sqrt{(1-\cos^2\alpha)^3}] - 3(\cos\alpha - \sqrt{1-\cos^2\alpha})| \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |4(\cos^3\alpha - \sin^3\alpha) - 3(\cos\alpha - \sin\alpha)| \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)| \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |\cos 3\alpha + \sin 3\alpha| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow |\cos(3\alpha - \frac{\pi}{4})| \le 1, \text{ luôn đúng.}$$

Ví dụ 2: Cho các số a, b thoả mãn $|b| \le |a|$. Chứng minh rằng:

$$|a+b| + |a-b| = |a + \sqrt{a^2 - b^2}| + |a - \sqrt{a^2 - b^2}|. \quad (1)$$

Giải

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = 0 \Rightarrow b = 0$, khi đó (1) luôn đúng.
- Nếu $a \ne 0$, biến đổi (1) về dạng:

$$\left|1 + \frac{b}{a}\right| + \left|1 - \frac{b}{a}\right| = \left|1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right| + \left|1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right|. \quad (2)$$

Đặt $\frac{b}{a} = \cos\alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$, khi đó (2) có dạng:

$$|1 + \cos\alpha| + |1 - \cos\alpha| = |1 + \sin\alpha| + |1 - \sin\alpha|$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos\alpha + 1 - \cos\alpha = 1 + \sin\alpha + 1 - \sin\alpha \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ luôn đúng.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{3} \leq 2|a|$.

Giải

Điều kiện : $a^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |a| \geq 1$.

Đặt $|a| = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, với $\alpha \in [0, \dfrac{\pi}{2})$.

Khi đó, bất đẳng thức được biến đổi về dạng:

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} + \sqrt{3} \leq \frac{2}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \mathrm{tg}\alpha + \sqrt{3} \leq \frac{2}{\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) \leq 1, \text{ luôn đúng.}$$

Ví dụ 4: Cho các số a, b, c, d thoả mãn $a^2 + b^2 = 1$ và $c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$|ac + bd| \leq 1.$$

Giải

Từ giả thiết: $a^2 + b^2 = 1$, đặt $a = \sin\alpha$ và $b = \cos\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

$c^2 + d^2 = 1$, đặt $c = \sin\beta$ và $b = \cos\beta$, $\beta \in [0, 2\pi)$.

Khi đó: $|ac + bd| = |\sin\alpha.\sin\beta + \cos\alpha.\cos\beta| = |\cos(\alpha + \beta)| < 1$ đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng: $|1 + ab| \leq \sqrt{a^2 + 1}.\sqrt{b^2 + 1}$.

Giải

Đặt $a = \mathrm{tg}\alpha$ và $b = \mathrm{tg}\beta$, với $\alpha, \beta \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$.

Khi đó bất đẳng thức được biến đổi về dạng:

$$|1 + \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta| \leq \sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}.\sqrt{\mathrm{tg}^2\beta + 1}$$

$$\Leftrightarrow \left|1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right| \leq \frac{1}{\cos\alpha}.\frac{1}{\cos\beta} \Leftrightarrow |\cos(\alpha - \beta)| \leq 1, \text{ luôn đúng.}$$

Ví dụ 6: Cho các số a, b, c thoả mãn $a + b + c - abc = 1 - ab - bc - ca$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1 - a^2}{a} + \dfrac{1 - b^2}{b} + \dfrac{1 - c^2}{c} = \dfrac{(1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)}{4abc}$.

Giải

Đặt $a = \mathrm{tg}\alpha$, $b = \mathrm{tg}\beta$, $c = \mathrm{tg}\gamma$, với $\alpha, \beta, \gamma \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$.

Từ giả thiết ta có:

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma - \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\gamma = 1 - \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\gamma - \mathrm{tg}\gamma.\mathrm{tg}\alpha. \quad (1)$$

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $1 - \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\gamma - \mathrm{tg}\gamma.\mathrm{tg}\alpha = 0$, ta được:

$$\begin{cases} tg\alpha.tg\beta + tg\beta.tg\gamma + tg\gamma.tg\alpha = 1 \\ tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha.tg\beta.tg\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha + \beta + \gamma = l\pi \end{cases}$$ mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Nếu $1 - tg\alpha.tg\beta - tg\beta.tg\gamma - tg\gamma.tg\alpha \neq 0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma - tg\alpha.tg\beta.tg\gamma}{tg\alpha.tg\beta + tg\beta.tg\gamma + tg\gamma.tg\alpha} = 1 \Leftrightarrow tg(\alpha + \beta + \gamma) = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow tg2\alpha.tg2\beta - tg2\beta.tg2\gamma - tg2\gamma.tg2\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow cotg2\alpha + cotg2\beta + cotg2\gamma = cotg2\alpha.cotg2\beta.cotg\gamma. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng:

$$cotg2\alpha = \frac{1 - a^2}{a}, cotg2\beta = \frac{1 - b^2}{b}, cotg2\gamma = \frac{1 - c^2}{c}. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2) suy ra điều phải chứng minh.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ ĐẠI SỐ

Phương pháp lượng giác hoá để giải phương trình, bất phương trình và hệ đại số với mục đích thay đổi hình thức của bài toán giải phương trình, bất phương trình và hệ đại số đại số thành việc giải phương trình, bất phương trình và hệ lượng giác.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lượng giác hoá.

Bước 2: Thực hiện việc giải phương trình, bất phương trình và hệ lượng giác nhận được.

Chú ý: Các em học sinh cần ôn lại các phương pháp giải phương trình và hệ lượng giác, để có thể nhanh chóng tiếp cận được phương pháp này.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2})$.

Giải

Điều kiện : $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. (1)

Đặt $x = \sin t$ với $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \sin t(1 + 2\sqrt{1 - \sin^2 t}) \Leftrightarrow \sqrt{1 + \cos t} = \sin t(1 + 2\cos t)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = 2\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}(1 - \sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{t}{2} = 0 \ (l) \\ \sin\frac{3t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} \\ t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 1$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} < x$.

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$ (*)

Với điều kiện (*), đặt x = cost, $t \in [0, \pi]$. (**)

Khi đó, bất phương trình được chuyển về dạng :

$$\sqrt{1+\cos t} - \sqrt{1-\cos t} \leq \cos t \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos t} - \sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}} < \cos t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}) \leq \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2})(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2} - \sqrt{2}) > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})[\sqrt{2}\cos(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}] > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})[\cos(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}) - 1] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}) < 0 \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{2} \leq \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow -1 < \cos t < 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $-1 \leq x \leq 0$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{2}$. (1)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$ (*)

Với điều kiện (*), đặt $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $t \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\frac{1}{\cos t} + \frac{\frac{1}{\cos t}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin t + \cos t = 2\sqrt{2}\,\sin t.\cos t.$$

Đặt sint + cost = u, điều kiện $1 \leq u < \sqrt{2}$, suy ra sint.cost = $\dfrac{u^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$u = \sqrt{2}\,(u^2 - 1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\,u^2 - u - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{2} \\ u = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (l)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin t + \cos t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(t + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \sqrt{2}$

Ví dụ 4: Với $a \neq 0$, giải bất phương trình $\sqrt{x^2 + a^2} \leq x + \dfrac{2a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Giải

Đặt $x = |a|\,\text{tg}t$, với $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$\frac{|a|}{\cos t} \leq |a|\,\text{tg}t + \frac{2a^2.\cos t}{|a|} \Leftrightarrow 1 \leq \sin t + 2\cos^2 t \Leftrightarrow 2\sin^2 t - \sin t - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1 \Leftrightarrow \text{tg}t \geq -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x > -\frac{|a|}{\sqrt{3}}.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \geq -\dfrac{|a|}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $4x^3 - 3x = \dfrac{1}{2}$.

Giải

Ta có : $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \cos(\dfrac{\pi}{3} \pm 2\pi) = \cos\dfrac{\pi \pm 6\pi}{3}$.

Nhận xét rằng : $\cos\dfrac{\pi}{3} = \cos(3.\dfrac{\pi}{9}) = 4\cos^3\dfrac{\pi}{9} - 3\cos\dfrac{\pi}{9}$

$\Rightarrow x_1 = \cos\dfrac{\pi}{9}$ là một nghiệm của phương trình.

Tương tự, ta cũng được $x_{2,3} = \cos\dfrac{\pi \pm 6\pi}{9}$ là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình có ba nghiệm $x_1 = \cos\dfrac{\pi}{9}$, $x_2 = \cos\dfrac{7\pi}{9}$, $x_3 = \cos\dfrac{5\pi}{9}$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$.

Giải

Ta xét các trường hợp :

a. Với $x > 1$, suy ra VT > 1, do đó phương trình vô nghiệm.

b. Với $x < -1$, suy ra VT < 0, do đó phương trình vô nghiệm.

c. Với $|x| < 1$, đặt $x = \cos t$, với $t \in (0, \pi)$.

Khi đó, phương trình được chuyển về dạng:

$$8\cos t.(2\cos^2 t - 1)(8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 8\cos t.\cos 2t.\cos 4t = 1 \Leftrightarrow 8\sin t.\cos t.\cos 2t.\cos 4t = \sin t$$

$$\Leftrightarrow \sin 8t = \sin t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8t = t + 2k\pi \\ 8t = \pi - t + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2k\pi}{7} \\ t = \dfrac{\pi + 2k\pi}{9} \end{array}\right.$$

$$\overset{t \in (0,\pi)}{\Leftrightarrow} \quad t \in \{\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\}.$$

Vậy, phương trình có các nghiệm

$$x \in \{\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}, \cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{5\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9}\}.$$

Ví dụ 7: Giải và biện luận phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{1 - x} = m$. (1)

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$ (*)

Nhận xét rằng: $(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1 - x})^2 = 1$,

nên ta đặt: $\begin{cases} \sqrt{x} = \cos t \\ \sqrt{1 - x} = \sin t \end{cases}$, với $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (**)

Khi đó, phương trình có dạng: $\cos t + \sin t = m \Leftrightarrow \cos(t - \frac{\pi}{4}) = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$-1 < \frac{m}{\sqrt{2}} < 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \qquad (***)$$

với điều kiện đó ta đặt $\frac{m}{\sqrt{2}} = \cos\alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$.

Ta được: $\cos(t - \frac{\pi}{4}) = \cos\alpha \Leftrightarrow t - \frac{\pi}{4} = \pm\alpha + 2k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow x = \cos^2(\frac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi) \Leftrightarrow x = \cos^2(\frac{\pi}{4} \pm \alpha).$$

Ví dụ 8: Giải phương trình: $(1 - m^2)^x + (2m)^x = (1 + m^2)^x$, với $0 < m < 1$.

Giải

Ta có $(1 + m^2)^x > 0$ với mọi x, do đó biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}\right)^x + \left(\frac{2m}{1 + m^2}\right)^x = 1.$$

Đặt $m = \text{tg}t$ với $t \in (0, \frac{\pi}{4})$ suy ra $\frac{2m}{1 + m^2} = \sin 2t$ và $\frac{1 - m^2}{1 + m^2} = \cos 2t$.

Khi đó, phương trình có dạng: $(\sin 2t)^x + (\cos 2t)^x = 1$

Nhận xét rằng:

- $x = 2$ là nghiệm của phương trình
- Với $x > 2$ ta có: $\begin{cases} (\sin 2t)^x < \sin^2 2t \\ (\cos 2t)^x < \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow$ VT < 1, phương trình vô nghiệm.

- Với $x < 2$ ta có:

$$\begin{cases}(\sin 2t)^x > \sin^2 x\\(\cos 2t)^x > \cos^2 x\end{cases} \Rightarrow VT > 1,$$ phương trình vô nghiệm.

Vậy, với $0 < m < 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{2y}{1+y^2} = x\\\dfrac{2x}{1+x^2} = y\end{cases}$.

Giải

Đặt:

$$\begin{cases}x = \mathrm{tg}\alpha\\y = \mathrm{tg}\beta\end{cases}, \text{ với } \alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \qquad (*)$$

Khi đó, hệ được chuyển về dạng;

$$\begin{cases}\dfrac{2\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta} = \mathrm{tg}\alpha\\\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \mathrm{tg}\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2\beta = \mathrm{tg}\alpha & (1)\\\sin 2\alpha = \mathrm{tg}\beta & (2)\end{cases} \qquad (I)$$

Ta xét hai trường hợp:

- Nếu $\sin\alpha = 0$ thì $\sin\beta = 0$ và ngược lại, suy ra $x = y = 0$ là nghiệm của hệ.
- Xét $\sin\alpha \neq 0$ và $\sin\beta \neq 0$.

Nhân theo vế hai phương trình của hệ (I), ta được :

$$\sin 2\alpha.\sin 2\beta = \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{\cos\alpha.\sin\beta} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$2\sin\beta.\cos\beta.\cos\alpha = \sin\alpha \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \sin\beta = \sin\alpha \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \beta = \alpha. \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được :

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Khi đó, nghiệm của hệ là:

$$x = y = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}) \overset{k, l\in Z}{} \begin{cases}x = y = 0\\x = y = 1\\x = y = \ \ 1\end{cases}.$$

Vậy, hệ có 3 cặp nghiệm.

III. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Phương pháp lượng giác hoá để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số với mục đích thay đổi hình thức của bài toán dẫn tới việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số lượng giác.

Phương pháp này đặc biệt tỏ ra hiệu quả đối với các hàm đại số nhiều ẩn với dạng thường gặp nhất là:

"Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $u = f(x, y)$ biết $x^2 + y^2 = 1$"

Khi đó, ta lựa chọn việc đặt:

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi).$$

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $u = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$ với $x^2 + y^2 = 1$.

Giải

Vì $x^2 + y^2 = 1$, đặt $x = \cos\alpha$ và $y = \sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Khi đó, hàm số được chuyển về dạng: $u = \cos\alpha\sqrt{1+\sin\alpha} + \sin\alpha\sqrt{1+\cos\alpha}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacópxki ta được:

$$u^2 \le (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(2 + \cos\alpha + \sin\alpha) = 2 + \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \le 2 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow u \le \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Vậy $u_{Max} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha}}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sin\alpha} \\ \sin(\alpha + \dfrac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $u = 2x + 3\sqrt{3}y + 2$, với $4x^2 + 9y^2 = 16$.

Giải

Từ giả thiết ta được: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3y}{4}\right)^2 = 1$ đặt $\frac{x}{2} = \cos\alpha$ và $\frac{3y}{4} = \sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Khi đó, hàm số được chuyển về dạng:

$$u = 4\cos\alpha + 4\sqrt{3}\sin\alpha + 2 = 8(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) + 2 = 8\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) + 2$$

Vì $-1 \le \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) \le 1$ nên:

- $u_{Min} = -8 + 2 = -6$, đạt được khi:

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = -1 \Leftrightarrow \alpha + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\overset{\alpha\in[0,2\pi)}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ và } y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- $y_{Max} = 8 + 2 = 10$, đạt được khi:

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\overset{\alpha\in[0,2\pi)}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ và } y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{1 + x^4}{(1 + x^2)^2}$.

Giải

Đặt $x = \mathrm{tg}t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó hàm số được chuyển về dạng: $y = \frac{1 + \mathrm{tg}^4 t}{(1 + \mathrm{tg}^2 t)^2} = \frac{1 + \frac{\sin^4 t}{\cos^4 t}}{\frac{1}{\cos^4 t}} = \sin^4 t + \cos^4 t$

$$= (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2\sin^2 t.\cos^2 t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t.$$

Vì $0 \le \sin^2 2t \le 1$ nên :

- $y_{Min} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, đạt được khi

$$\sin^2 2t = 1 \Leftrightarrow \cos 2t = 0 \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\overset{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} t = \pm\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

- $y_{Max} = 1$, đạt được khi

$$\sin^2 2t = 0 \Leftrightarrow \sin 2t = 0 \Leftrightarrow 2t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{2}$$

$$\overset{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} t = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $u = \frac{4xy - 4y^2}{x^2 + y^2}$.

Giải

Ta xét hai trường hợp:

- Với $y = 0$, ta được $u = 0$.
- Với $y \neq 0$, chia tử số và mẫu số cho $y^2 \neq 0$, ta được: $f(x, y) = \frac{\frac{4x}{y} - 4}{\frac{x^2}{y^2} + 1}$.

Đặt $\frac{x}{y} = \mathrm{tg}t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó, hàm số được chuyển về dạng:

$$u = \frac{4\text{tg}t - 4}{\text{tg}^2 t + 1} = \frac{\dfrac{4\sin t}{\cos t} - 4}{\dfrac{1}{\cos^2 t}} = 4\text{sintt}.\cos t - 4\cos^2 t$$

$$= 2\sin 2t - 2(1 + \cos 2t) = 2\sqrt{2}\sin(2t - \frac{\pi}{4}) - 2.$$

Vì $-1 \le \sin(2t - \frac{\pi}{4}) \le 1$ nên:

- $u_{Min} = -2\sqrt{2} - 2$, đạt được khi $\sin(2t - \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow 2t - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{8} + k\pi \overset{t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} t = -\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \text{tg}(-\frac{\pi}{8}).$$

- $u_{Max} = 2\sqrt{2} - 2$, đạt được khi $\sin(2t - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow 2t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{8} + k\pi \overset{t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} t = \frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \text{tg}(\frac{3\pi}{8}).$$

Ví dụ 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $u = \frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$.

Giải

Đặt $x = \text{tg}\alpha$ và $y = \text{tg}\beta$, $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Khi đó, hàm số được chuyển về dạng:

$$u = \frac{(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta)(1 - \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta)}{(1 + \text{tg}^2\alpha)(1 + \text{tg}^2\beta)} = \frac{\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta} \cdot \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \dfrac{1}{\cos^2\beta}} = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha + \beta).$$

Vì $-1 \le \sin 2(\alpha + \beta) \le 1$ nên:

- $u_{Min} = -\frac{1}{2}$, đạt được khi:

$$\sin 2(\alpha + \beta) = -1 \Leftrightarrow 2(\alpha + \beta) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\overset{\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{tg}(\alpha + \beta) = \text{tg}(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \frac{x + y}{1 - xy} = -1.$$

- $u_{Max} = \frac{1}{2}$, đạt được khi:

$$\sin 2(\alpha + \beta) = 1 \Leftrightarrow 2(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\overset{\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{tg}(\alpha + \beta) = \text{tg}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{x + y}{1 - xy} = 1.$$

MỤC LỤC

GIỚI THIỆU CHUNG 3

CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Chủ đề 1: *Góc và cung lượng giác* 5
Bài toán 1: Tính giá trị của biểu thức lượng giác chứa cung đặc biệt 7
Bài toán 2: Dấu của biểu thức lượng giác 8
Bài toán 3: Rút gọn biểu thức lượng giác 10
Bài toán 4: Chứng minh đẳng thức lượng giác đơn giản 12
Bài toán 5: Biểu thức lượng giác độc lập đối với biến 16
Bài toán 6: Tính giá trị của biểu thức lượng giác 19
Bài toán 7: Góc phụ, bù nhau 26
Chủ đề 2: *Các hàm số lượng giác* 31
Bài toán 1: Tập xác định của hàm số lượng giác 33
Bài toán 2: Tính tuần hoàn của các hàm số lượng giác 35
Bài toán 3: Tính chẵn, lẻ của các hàm số lượng giác 39
Bài toán 4: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số lượng giác 40
Bài toán 5: So sánh giá trị của các hàm số lượng giác 44
Chủ đề 3: *Công thức lượng giác* 46
Bài toán 1. Biến đổi biểu thức lượng giác thành tổng 48
Bài toán 2. Biến đổi biểu thức lượng giác thành tích 49
Bài toán 3. Rút gọn biểu thức lượng giác 53
Bài toán 4. Chứng minh đẳng thức lượng giác độc lập với biến số 56
Bài toán 5. Tính giá trị của biểu thức lượng giác 57
Bài toán 6. Chứng minh đẳng thức lượng giác 62
Bài toán 7. Chứng minh bất đẳng thức lượng giác 67
Bài toán 8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất 71
Chủ đề 4: *Hệ thức lượng trong tam giác* 80
Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức lượng giác trong tam giác 81
Bài toán 2: Chứng minh dất đẳng thức lượng giác trong tam giác 94
Bài toán 3: Nhận dạng tam giác 110

CHƯƠNG II

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Chủ đề 1. ***Phương trình lượng giác cơ bản*** 119

Bài toán 1. Giải và biện luận phương trình sinx = m 119

Bài toán 2. Giải và biện luận phương trình cosx = m 120

Bài toán 3. Giải và biện luận phương trình tgx = m 122

Bài toán 4. Giải và biện luận phương trình cotgx = m 123

Bài toán 5. Giải và biện luận theo m số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình lượng giác cơ bản 124

Chủ đề 2. ***Một số phương trình lượng giác thường gặp*** 127

Bài toán 1. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác 127

Bài toán 2. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx 131

Bài toán 3. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx 139

Bài toán 4. Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx 144

Bài toán 5. Loại nghiệm không thích hợp 147

Chủ đề 3. ***Những phương trình lượng giác khác*** 153

Bài toán 1: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đặt ẩn phụ 155

Bài toán 2: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đổi biến 159

Bài toán 3: Giải phương trình lượng giác sử dụng công thức hạ bậc 163

Bài toán 4: Giải phương trình lượng giác bằng việc biến đổi nó về dạng tích 170

Bài toán 5: Giải phương trình lượng giác bằng việc biến đổi phương trình thành tổng các đại lượng không âm 184

Bài toán 6: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá 187

Chủ đề 4. ***Hệ phương trình lượng giác*** 195

Bài toán 1: Giải và biện luận hệ tổng 195

Bài toán 2: Giải và biện luận hệ tích 198

Bài toán 3: Giải và biện luận hệ thương 201

PHỤ LỤC: Phương pháp lượng giác hoá 212

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: LAN HƯƠNG
Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN LƯỢNG GIÁC 11

Mã số: 1L – 35ĐH2005
In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Chi nhánh Công ty Phát triển Công nghệ và Truyền hình – TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 25-2005/CXB/14-208/XB/NXB ĐHQG HN, ngày 6/10/2005.
Quyết định xuất bản số: 11/LK/QĐ-NXB ĐHQGHN.
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2005.